

**問題** ('09 岩手大)

【難易度】… 難

数列  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_k, \dots$  を次のように、第  $n$  群が  $2^{n-1}$  個の項を含むように分ける。

$$\{a_1\}, \{a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6, a_7\}, \{a_8, a_9, \dots, a_{15}\}, \{\dots\}, \dots$$

- (1) 第  $n$  群の初項と末項を求めよ。
- (2)  $a_k = \frac{1}{k}$  のとき、第  $n$  群に含まれる項の和は  $\frac{1}{2}$  より大きいことを示せ。
- (3)  $a_k = \frac{1}{k^2}$  のとき、第 1 群から第  $n$  群までのすべての項の和は 2 を超えないことを示せ。

【テーマ】: 群数列と和の評価

**方針**

(1) は添え字に着目して考えます。(2), (3) はそのままでは和が計算できないので、不等式を用いて分母を統一し、和を計算しましょう。

**解答**

- (1) 第  $n-1$  群の末項までの項数は、

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} = \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1 \dots\dots \textcircled{1}$$

であるから、第  $n$  群の初項は、 $a_{2^{n-1}}$ ……(答)

さらに、第  $n$  群の末項までの項数は  $\textcircled{1}$  より、 $2^n - 1$  であるから、第  $n$  群の末項は、 $a_{2^n - 1}$ ……(答)

- (2) 【証明】

第  $n$  群の和を  $S_n$  とすると、

$$S_n = a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \dots + a_{2^n - 1}$$

よって、 $a_k = \frac{1}{k}$  のとき、

$$\begin{aligned} S_n &= a_{2^{n-1}} + a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \dots + a_{2^n - 1} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n - 1} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}}_{2^{n-1} \text{ 個の項がある}} \\ &= \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} > \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ゆえに、示された。

(証明終)

- (3) 【証明】

(2) と同様に考えると、 $a_k = \frac{1}{k^2}$  のとき、第  $n$  群の和  $S_n$  は、

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}+2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^n - 1}\right)^2 \\ &< \underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2}_{2^{n-1} \text{ 個の項がある}} = 2^{n-1} \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

よって、 $S_n < \frac{1}{2^{n-1}}$  が成り立つので、第 1 群から第  $n$  群までの和を  $T_n$  とすると、

$$T_n = \sum_{k=1}^n S_k < \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} < 2$$

ゆえに、示された。

(証明終)



**解説**

不等式を用いて群数列の和を評価する問題です。基本的に (2), (3) で出てくるような和は計算できません。そこで、分母を統一することを考えます。次の式を見てください。

- (i)  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$     ⇨ 分母が一番大きい数に統一すると値は小さくなる。  
 (ii)  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$     ⇨ 分母が一番小さい数に統一すると値は大きくなる。

本問では、この事実を用いて式変形を行っています。(2) では結論から  $\frac{1}{2}$  より大きいことを示したいので、結果的に  $S_n > \frac{1}{2}$  を示す必要があります。そのため、不等式をより小さい値で評価する必要があるのです。したがって、(i) のように式変形する必要があるので、分母を  $2^n - 1$  に統一しました。(3) は逆に 2 を超えないことを示すので、 $T_n < 2$  を導く必要があります。そのため (ii) のように式変形するため分母を  $2^{n-1}$  に統一しました。非常によくある式変形なので、確実にマスターしておきましょう。