区分求積法

区分求積法は数学 Ⅲ で学習する内容ですが，式の見た目がややこしいため，よくわからないという声をよく聞きます．そこで，区分求積法について解説しましょう．意味をしっかり掴むことができれば，公式も複雑に見えず応用が利くようになるはずです．

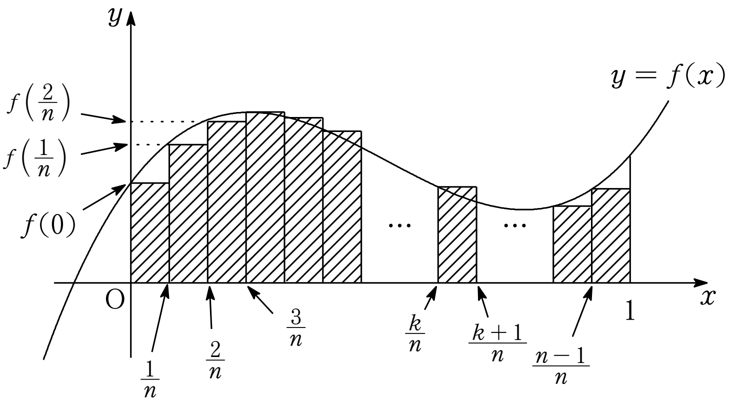
まずは，公式の成り立ちから説明していきます．

例えば，三角形や四角形であれば面積を求める公式を知っているでしょう．しかし，曲線で囲まれている部分の面積を求めるのは困難です．そこで，曲線で囲まれている部分を無数の四角形で分割してやればある程度面積を近似することができます．これが最初の考え方です．しかし，これではあまりにも漠然としているので，もう少し整理して計算しやすくする必要があります．そこで，次のようなものを考えてみましょう．関数 $f(x)$ と $x=0, x=1$ および x 軸で囲まれる部分を D とし，領域 D の面積を考える．この領域をいくつかの四角形に分割してみましょう．しかし，適当に分割すると計算できないので，いくつかのルールを決めて分割します．

（ｉ） 区間を n 等分することで，四角形の一辺の長さを $\dfrac{1}{n}$ に統一する．これを四角形の横の長さとする．

（ii） 四角形の左上端が関数上にくるように縦の長さを決定する．

ルールはこれだけです．これをもとにしてグラフをかくと下図のようになります．



さて次に四角形の面積を求めてみましょう．底辺の長さはどの四角形も $\dfrac{1}{n}$ ですね！次に高さは様々な値をとります．左端の四角形から順に高さは，

$$f(0),\ f\left(\frac{1}{n}\right),\ f\left(\frac{2}{n}\right),\ \cdots,\ f\left(\frac{k}{n}\right),\ \cdots,\ f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

となっています．四角形の左上端が関数上にくるようにしているので，四角形の左端の x 座標の値を $f(x)$ に代入することで高さが求まるというわけです．高さが求まれば，四角形の面積を計算するのは容易です．上図の斜線部分の面積の和は，次のようになります．

$$\underbrace{\frac{1}{n}\times f(0)}_{\text{一番左の四角形の面積}} + \underbrace{\frac{1}{n}\times f\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{二番目の四角形の面積}} + \underbrace{\frac{1}{n}\times f\left(\frac{2}{n}\right)}_{\text{三番目の四角形の面積}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n}\times f\left(\frac{k}{n}\right)}_{k-1\text{ 番目の四角形の面積}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n}\times f\left(\frac{n-1}{n}\right)}_{\text{一番右の四角形の面積}}$$

$\dfrac{1}{n}\times f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ は $k-1$ 番目の四角形の面積であることに注意してください．（一番目が $f(0)$ なので k 番目ではありません．）この和は，もう少しシンプルな形に直すことができそうです！まず，全体を $\dfrac{1}{n}$ で因数分解し，和を Σ を用いて表すと，

$$\frac{1}{n}\left\{f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{k}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

となります．

さて，このままでは，かなり荒い近似で領域 D の面積を表しているとはいえません．そこで，領域 D の面積に近づけるため分割数をもっと増やすことを考えます．n を大きくすると四角形の底辺の長さはどんどん小さくなっていきます．ここで，極限の考え方を用いると，$n \to \infty$ とすれば，四角形の底辺はほとんど 0 になります．つまり，線分に近似していきます．しかし，どんなに小さくしても底辺の長さが 0 になるわけではないので，当然面積はあります．このようにして $n \to \infty$ としたものが領域 D の面積に近づくので，

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

という式が成り立つのです．今は，四角形の左上端を関数上にとったので，このような形になりますが，右上端が関数上にくるようにしてもまったく同じ議論で次の式を導くことができます．$\sum$ の上端と下端の違いに注目してください．

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

前頁の図を自分でかいて上式を導き出してみましょう．これが導ければ，区分求積法の基本は理解できたはずです．つまり，公式を次のように考えればよいのです．

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{四角形の底辺}} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\text{四角形の高さ}}}_{n\text{ 個の四角形の面積の和}}$$

どうですか？だんだん公式が分解して（四角形の面積の和に）見えてきませんか？そうなったらもうこっちのものです！ここまでくれば，第一段階突破！といった感じです．

区分求積法は，様々な極限値を求めるときによく用いられます．極限を定積分で表すことができるため，式が簡単になる場合が多いからです．さて，公式の基本が理解できたところで，基本問題を解いてみましょう．

例題

次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \cdots\cdots + \frac{n}{n^2}\right)$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \left(e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + 3e^{\frac{3}{n}} + \cdots\cdots + ne^{\frac{n}{n}}\right)$

まずは，公式の形に変形して，対応する関数 $f(x)$ が見つけられるようになる必要があります．

♣ ♠

解答 と **解説**

(1) $f(x) = \sin \pi x$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \sin \pi x\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right]_0^1
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos\pi + \frac{1}{\pi}\cos 0$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{\pi}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

（2） まずは，和の部分を Σ を用いて表して，公式の形に変形してみましょう．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\end{aligned}$$

よって，$f(x)=x$ とすれば，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1 f(x)\,dx\\ &= \int_0^1 x\,dx\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

（3） （2）と同様に，公式の形に変形してみましょう．

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+ne^{\frac{n}{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}ke^{\frac{k}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

よって，$f(x)=xe^x$ とすれば，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1 f(x)\,dx\\ &= \int_0^1 xe^x\,dx\\ &= \left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx\\ &= e-\left[e^x\right]_0^1\\ &= e-(e-1)\\ &= \mathbf{1}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

区分求積法の公式を適用させるポイントは 2 つあります．一つは $\frac{1}{n}$ があること，もう一つは $\frac{k}{n}$ を x に書き換えることで関数 $f(x)$ を見つけることです．言うまでもありませんが，$\lim_{n\to\infty}$, Σ がないものは論外です．$\boxed{\text{解答}}$ と $\boxed{\text{解説}}$ では，わかりやすくするため $f(x)$ をいちいち明記しましたが，通常解答を書くときは特に書かなくても問題ありません．

さて，後はこの形を見つけることに慣れる必要があります．いくつかの練習問題を通して，形を見つけることに慣れましょう．

◀演習問題▶

1 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)(2n+k)}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$

方針 公式の形を思い出して，$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{k}{n}$ を作り出してみましょう．

♣ ♠

解答 と 解説

(1)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)(2n+k)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)(2n+k)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(2+\frac{k}{n}\right)}\\ &= \int_0^1\frac{1}{(1+x)(2+x)}\,dx\\ &= \int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx\\ &= \Big[\log|x+1|-\log|x+2|\Big]_0^1\\ &= \log 2-\log 3-(\log 1-\log 2)\\ &= \mathbf{2\log 2-\log 3}\cdots\cdots(\textbf{答})\quad\left(\log\frac{4}{3}\ \text{でも可}\right)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\\ &= \Big[\log|x+1|\Big]_0^1\\ &= \log 2-\log 1\\ &= \mathbf{\log 2}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

ここまでは，比較的公式の形が見えるので，式変形もそれほど難しくありませんでした．しかし (3) は少し難しいタイプの問題です．先頭にある $\dfrac{1}{n}$ は，実は最終的に区分求積法の公式にある $\dfrac{1}{n}$ にはなりません．それはとりあえず置いておきましょう．$\dfrac{1}{n}$ は (1), (2) を見てもわかるように，なくても後で帳尻を合わせて出してくれればよいのです．それよりも Σ がなければ話にならないですよね！ですからまずは Σ をどのようにして出すかを考えましょう．しかし，このまま式変形を繰り返しても，Σ が出てきそうにありません．掛け算はいっぱいあるのに…掛け算が足し算になれば…ってことは…そう！あれですね！！

(3)　$N=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$ とおくと，

$$\begin{aligned} N &= \sqrt[n]{\frac{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}{n^n}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{3n+1}{n}\cdot\frac{3n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+n}{n}} \\ &= \sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(3+\frac{n}{n}\right)} \end{aligned}$$

よって，両辺に自然対数をとると，

$$\begin{aligned} \log N &= \log\sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(3+\frac{n}{n}\right)} \\ &= \log\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(3+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\log\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(3+\frac{n}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left\{\log\left(3+\frac{1}{n}\right)+\log\left(3+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(3+\frac{n}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(3+\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

となるので，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\log N &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(3+\frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 \log(3+x)\,dx \\ &= \Big[\,(x+3)\log(x+3)\,\Big]_0^1-\int_0^1(x+3)\cdot\frac{1}{x+3}\,dx \\ &= 4\log 4-3\log 3-\Big[\,x\,\Big]_0^1 \\ &= 4\log 4-3\log 3-1 \\ &= \log 256-\log 27-\log e \\ &= \log\frac{256}{27e} \end{aligned}$$

である．したがって，求める極限値は，

$$\lim_{n\to\infty}N = \boldsymbol{\frac{256}{27e}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇　♡

(1), (2) は，基本問題ですが，(3) は発展問題です．積を和にするために対数をとることがポイントになります．このような問題は，経験しておかなければ難しいですが，何度か経験を積んでおけば恐れることはないでしょう．それでも n 乗根の計算などがあるので，計算力はいります．

では，次のような場合はどうすればよいでしょうか？

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

一見すると区分求積法が適用できそうですが，微妙に公式とは違います．$\dfrac{k-1}{n}$ という部分がおしいですね！しかし，このような場合は次のように考えることで，解決できます．

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{0}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \int_0^1 f(x)\,dx
\end{aligned}$$

公式と形が違っていても，$\sum$ の部分を書き下して，公式が適応できる形に変形できればよいのです．（もちろんいつもうまくいくとは限りませんが…）公式を表面的にしか理解していない（丸暗記している）場合は，このような場面に出くわしたとしても解決できないはずです．では次の例題を解いてみましょう．

例題　次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k+1}{n}\pi$$

方針　$\sum$ を書き下して公式の形に帰着させます．

♣　♠

解答 と **解説**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k+1}{n}\pi &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{2}{n}\pi+\sin\frac{3}{n}\pi+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi+\sin\frac{n+1}{n}\pi\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\underbrace{\sin\frac{1}{n}\pi+\sin\frac{2}{n}\pi+\cdots+\sin\frac{n}{n}\pi}_{\text{ここを }\sum\text{ でまとめる}}+\sin\frac{n+1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi+\underbrace{\sin\frac{n+1}{n}\pi}_{\text{ここに加法定理を適用}}-\sin\frac{1}{n}\pi\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\sin\frac{1}{n}\pi\right) \\
&= \int_0^1\sin\pi x\,dx-0\times 0 \\
&= \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi} \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{\pi}}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

♢　♡

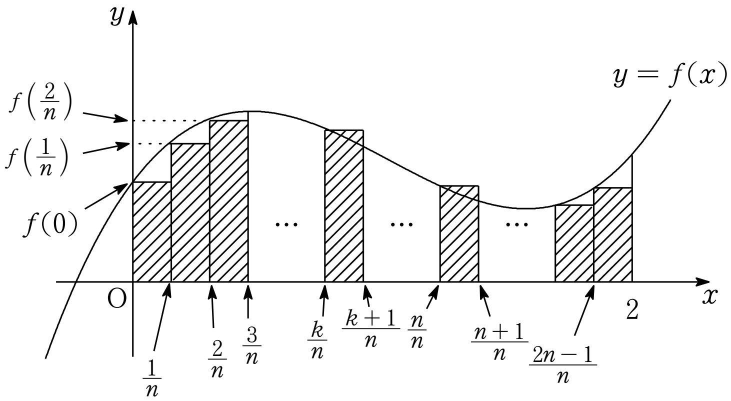
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi$ という形を作るため，一度 $\sum$ を書き下して，足りない項を補って（もちろん等式を成り立たせるため後で引かないといけませんが…）やる必要があります．残った項は普通に極限値を計算すればよいのです．

ここまでは，式を変形すれば区分求積法の公式にたどり着ける問題を扱いました．では，少しレベルを上げましょう！次は，この公式を応用してみます．これまでは，極限値を定積分で置き換える際，積分区間は $[0,1]$ でした．特に気を使わなかったでしょうけど…しかし，世の中そんなに甘くありません！積分区間がいつも $[0,1]$ だと思ったら大間違い（笑）．今度は，この部分に焦点を当ててみましょう．

例題 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$$

注目すべき部分は，$\sum$ の上端です．今までは n だったものが $2n$ になっています．これは，何を意味するのでしょう．区分求積法の基本に戻って考えてみましょう．



k を 1 から $2n$ まで加えるということは，上図のように区間が 2 倍になると考えます．つまり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^2 f(x)\,dx$$

という式が成り立つことがわかります．これを元に例題を解くと，次のようになるのです．

♣ ♠

解答 と **解説**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n}{n+k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\ &= \int_0^2\frac{1}{1+x}\,dx\\ &= \Big[\log|x+1|\Big]_0^2\\ &= \mathbf{\log 3}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

♢ ♡

つまり，加える区間にも注意が必要というわけです．では，類題を解いてみましょう．

◀演習問題▶

2 次の極限値を求めよ.

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{3n}{n}\right)$

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{n}{(n+k)(n+2k)}$

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\sqrt{(2n)^2-1^2}+\sqrt{(2n)^2-2^2}+\sqrt{(2n)^2-3^2}+\cdots+\sqrt{(2n)^2-(2n-1)^2}\right\}$

方針　$\sum$ の上端と下端に注意して積分区間を決定します.

♣　♠

解答 と 解説

（1）
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{3n}{n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{3n}{n}\right)\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\\
&=\int_0^3\log(1+x)\,dx\\
&=\Big[\,(x+1)\log|x+1|-x\Big]_0^3\\
&=4\log 4-3\\
&=\mathbf{8\log 2-3}\cdots\cdots\text{（答）}\quad\left(\log\frac{256}{e^3}\text{ でも可}\right)
\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{n}{(n+k)(n+2k)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{n^2}{(n+k)(n+2k)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+2\frac{k}{n}\right)}\\
&=\int_1^3\frac{1}{(1+x)(1+2x)}\,dx\\
&=\int_1^3\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\
&=\Big[\,\log|2x+1|-\log|x+1|\,\Big]_1^3\\
&=\log 7-\log 4-(\log 3-\log 2)\\
&=\log 7-\log 2-\log 3\\
&=\mathbf{\log\frac{7}{6}}\cdots\cdots\text{（答）}
\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\sqrt{(2n)^2-1^2}+\sqrt{(2n)^2-2^2}+\sqrt{(2n)^2-3^2}+\cdots+\sqrt{(2n)^2-(2n-1)^2}\right\}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{(2n)^2-k^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{n^2\left\{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \quad\cdots\cdots Ⓐ$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\frac{2}{n}\right) \quad\cdots\cdots Ⓑ$$

$$= \int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx \quad\cdots\cdots Ⓒ$$

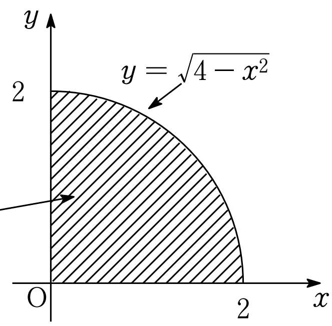
$$= \frac{1}{4}\cdot 2^2\pi \quad\cdots\cdots Ⓓ$$

$= \boldsymbol{\pi}$……(**答**)

◇ ♡

(3) は，2005 年の山口大学の入試問題です．後半の式変形が少しだけ悩むかもしれません．Ⓐ から Ⓑ では $\sum$ の下端が $k=1$ から $k=0$ に変わっています．区分求積法の公式を適用するためには，$\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}$ または $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}$ の形になっていなければならないことは，区分求積法の根本的な考え方に戻れば理解できると思います．したがって，このような変形をしています．Ⓒ から Ⓓ はいちいち置換積分をするのではなく，四分円の面積を利用できるようにしておきましょう．$\left(\right.$四分円とは円の $\frac{1}{4}$ という意味です．右図を参照してください．$\left.\right)$

この部分の面積が
$\displaystyle\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$



さて，ここまで大体のことは終わりです．あとは，様々な入試問題で応用するだけです．見た目から区分求積法を使うとわかるものや，最初はわからなくても解答過程でそれが出てくるものなど，様々です．以下の入試問題を最後に解いて終わりにしましょう．

問題 （’07　東北大）

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上に点 P_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ を $\angle P_kOA=\dfrac{k}{n}\pi$ をみたすようにとる．ただし，O(0, 0), A(2, 0) とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{OP_1^2}+\frac{1}{OP_2^2}+\cdots+\frac{1}{OP_n^2}\right)$$

を求めよ．

方針　点 P_k の座標を $P_k(OP_k\cos\theta, OP_k\sin\theta)$ とおく．

♣ ♠

解答 と **解説**

題意より，$\mathrm{P}_k\left(\mathrm{OP}_k\cos\dfrac{k}{n}\pi,\ \mathrm{OP}_k\sin\dfrac{k}{n}\pi\right)$ とおくと，点 P_k は，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上の点であるから，

$$\frac{\mathrm{OP}_k^2\cos^2\frac{k}{n}\pi}{4}+\frac{\mathrm{OP}_k^2\sin^2\frac{k}{n}\pi}{9}=1 \iff \frac{1}{\mathrm{OP}_k^2}=\frac{\cos^2\frac{k}{n}\pi}{4}+\frac{\sin^2\frac{k}{n}\pi}{9}$$

と変形することができる．よって，求める極限は，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\mathrm{OP}_1^2}+\frac{1}{\mathrm{OP}_2^2}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{OP}_n^2}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{OP}_k^2}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\cos^2\frac{k}{n}\pi}{4}+\frac{\sin^2\frac{k}{n}\pi}{9}\right)\\
&=\int_0^1\left(\frac{\cos^2\pi x}{4}+\frac{\sin^2\pi x}{9}\right)dx\\
&=\int_0^1\left(\frac{1+\cos2\pi x}{8}+\frac{1-\cos2\pi x}{18}\right)dx\\
&=\left[\frac{1}{8}x+\frac{1}{16\pi}\sin2\pi x+\frac{1}{18}x-\frac{1}{36\pi}\sin2\pi x\right]_0^1\\
&=\frac{1}{8}+\frac{1}{18}\\
&=\boldsymbol{\frac{13}{72}}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

◇ ♡

ここまでのことがしっかりと理解できれば，区分求積法に関する問題は，ずいぶん解けるようになるでしょう．区分求積法に限らず，数学は記号に圧倒されることなくその意味をしっかりとつかむことができれば，理解度は格段にあがります．これからの受験勉強で，区分求積法が出てきたら今回勉強したことを思い出してチャレンジしてみてください．