2 （オリジナル問題） **【難易度】**… 標準

平面上に AB $=\sqrt{3}$, BC $=\sqrt{2}$, CA $=1$ の直角三角形 ABC がある．点 P が次の等式をみたすとき，点 P はどのような図形上にあるか．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

【テーマ】：円のベクトル方程式

方針

ベクトルの問題の攻略法は，**始点を揃える**ことです．この問題は，始点を A に揃えるか O に揃えるかの 2 通りを考えることができます．どちらにしてもその後の式変形でやることは同じです．

図形の問題は，いくつかの解決方法があります．次の 3 通りがあることを熟知しておきましょう．

（ｉ） ベクトルを用いる．
（ii） 座標を用いる．
（iii） 平面幾何を用いる．

問題文中にベクトルが用いられていなくてもベクトルを用いることで簡単に解決する問題があるので，図形問題を解く際には上のどの方法で解けばよいのかをよく考えてから解答の方針を立てましょう！

ポイント

ベクトルを用いるときは始点を揃える！

始点を O に揃える場合と A に揃える場合の 2 通りの解答をしてみましょう．

♣ ♠

解答

点 A, B, C, P の位置ベクトルをそれぞれ，$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$

$$\iff (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{c})+(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$

$$\iff |\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{p}|^2-(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{p}|^2-(\vec{c}+\vec{a})\cdot\vec{p}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\iff 3|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\iff 3\left(|\vec{p}|^2-\frac{2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}}{3}\right)+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\iff 3\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2}{3}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

$$\iff 3\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-3(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})}{3}=0$$

$$\iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})}{9}=0$$ ☞ 解説 ❶

$$\iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2}{18}=0 \cdots\cdots ①$$ ☞ 解説 ❶

ここで，

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=3,\ |\vec{b}-\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=2,\ |\vec{c}-\vec{a}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=1$$

であるから，① は次のようになる．

$$\left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|^2-\frac{1}{3}=0 \iff \left|\vec{p}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$ ☞ 公式

ゆえに，**点 P は三角形 ABC の重心を中心とする半径 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ の円周上にある．**……(答)

別解

始点を A に揃えると次のような解答になる．こちらの方が式変形としては若干シンプルになるが，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が簡単に求められるであろうか？

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0\\
\iff\ &\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0\\
\iff\ &3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\iff\ &3\left(|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-\frac{2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{3}\right)+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\iff\ &3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}{3}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\\
\iff\ &3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}{3}=0
\end{aligned}$$

ここで，△ABC は ∠C = 90° の直角三角形であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=3,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=1,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\cdot1=1$$ ☞ 解説

である．したがって，

$$\begin{aligned}
&3\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}{3}=0\\
\iff\ &\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2-\frac{3-1+1}{9}=0\\
\iff\ &\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|^2=\frac{1}{3}\\
\iff\ &\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

ゆえに，**点 P は三角形 ABC の重心を中心とする半径 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ の円周上にある．**……(答)

◇ ♡

解説

始点を O に揃える方は，式変形が少し難しくなります．始点を A に揃える方は，式変形はそれほど難しくありませんが，内積の値がスムーズに求められるかどうかが鍵となります．それぞれを詳しく解説しておきましょう．

解説❶

解答中の式変形では，次の 2 つの公式を利用して計算している．

$$\begin{cases}(\text{i})\quad (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\ (\text{ii})\quad a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\end{cases}$$

© 大学受験 · 数学塾 管理人 : makoto

（ｉ）は展開するだけなので，覚えていなくてもその場で計算すればよいが，（ii）の式変形は必ずマスターしておくこと．これは，次のようにして行う．

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca &= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\} \\ &= \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \end{aligned}$$

解説❷

内積の定義をもう一度確認しておこう．

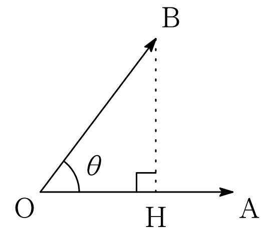
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は，右図のように，点 B から線分 OA に垂線を下ろしその足を H とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$$

で与えられる．したがって，$\angle\mathrm{BOA}=\theta$ とすれば，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$ となるので，内積の定義式

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\theta$$

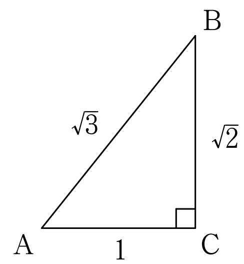
を得る．



つまり，本問のように，三角形が右図のようになっていれば，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=1$$

となるので，解答のような計算になる．つまり $\cos\angle\mathrm{CAB}$ を求める必要はない．



実はこの 解説❷ はベクトルの**正射影**と呼ばれるもので受験では非常に大切な計算方法ですから内容をしっかりと理解して使えるようにしておいて下さい．最後に，忘れがちな円のベクトル方程式を復習しておきましょう．

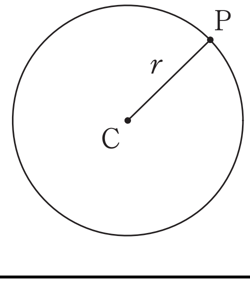
公 式　**円のベクトル方程式**

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とし，点 P を円周上の任意の点とする．

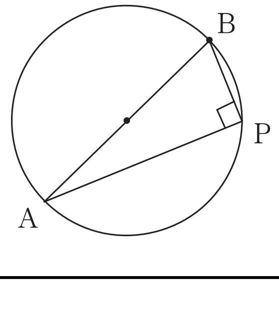
（ｉ） 中心 C，半径 r の円　$\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=r$, $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$

（ii） 線分 AB を直径とする円　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

（ｉ）



（ii）



© 大学受験・数学塾　管理人：makoto