3 （オリジナル問題）　**【難易度】…** 標準

xy 平面上の原点 O に点 P があり，次の規則に基づいて点 P を移動させる．ただし，n は 0 以上の整数とする．

【規則】

① 点 P が $(n,\ 0)$ にあるときは，次の移動で $(n+1,\ 1)$, $(n+1,\ 0)$, $(n+1,\ -1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ の確率で移動する．

② 点 P が $(n,\ 1)$ にあるときは，次の移動で $(n+1,\ 0)$, $(n+1,\ 1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ の確率で移動する．

③ 点 P が $(n,\ -1)$ にあるときは，次の移動で $(n+1,\ 0)$, $(n+1,\ -1)$ のいずれかにそれぞれ $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ の確率で移動する．

n 回移動した後の点 P を P_n とするとき，P_{n-1} と P_n の y 座標が初めて等しくなるときの確率を a_n とする．

(1)　a_1, a_2, a_3 をそれぞれ求めよ．

(2)　a_n を求めよ．

【テーマ】：規則性の発見

方針

確率漸化式の問題演習がしっかりとできている人は，問題を読むと一瞬，確率漸化式の問題かな？って思うかもしれませんが，規則性をしっかりと捉えれば確率漸化式を立てることなく解答できることに気づくでしょう！まずは (1) を丁寧に解くことが大切です．

入試問題には，本問のように (1) で $n=1,\ 2,\ 3$ の場合を答えさせて，(2) 以降で一般の n について問う場合が多くあります．（みなさんも経験しているはずなのでわかるはずです．）なぜこのような問い方をするかというと，その理由として次の 2 つが挙げられるでしょう．（作問者の気持ちを知ることも問題を解く上では大切なんです！！それを知ることで，解答の方針が見えてくることがあるからです．）

（ i ）　規則性を見つけさせてその後の問題の指針を与えるため．

（ ii ）　その後の問題でその値が必要になるため．

漸化式を立てるような問題では，(ii) が当てはまるでしょう．本問は，(i) を目的として作問しています．本問で学んでほしいことは，一般の n について問われていることに関してすぐに方針が立たない場合は，**実験して規則を見つける**ことです．これができるようになるだけで随分方針が見えてくる場合があるのです．

ポイント

n に関する問題は，実験をして規則性を見つけよう！

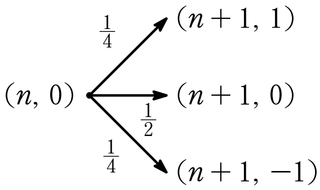
もちろんすべてこれで解決するわけではありません．あくまでそのような視点を持っておくことが大切ということです．

本問攻略のポイントは，じっくりと問題文を読んでその意味をしっかりと理解することです．点の移動を把握するため解答でも書いているようにまずその動きと確率を図にかいてやることです．これをするだけでも随分見通しがよくなるはずです．

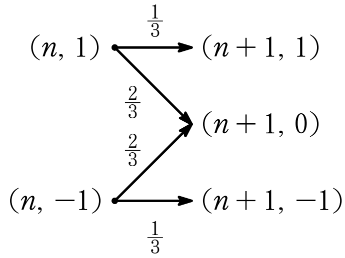
♣　♠

解答

【規則 ①】



【規則 ②, ③】



(1)

Ⓐ　a_1 について,

P_0, P_1 の y 座標が等しくなるのは, $P_1(1,\ 0)$ のときであるから,

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

Ⓑ　a_2 について,

P_1, P_2 の y 座標が初めて等しくなるのは, P_1 の y 座標が 1 か -1 のいずれかで, P_2 の y 座標がそれぞれ 1 か -1 のときである．すなわち,

（ｉ）$P_1(1,\ 1)$, $P_2(2,\ 1)$

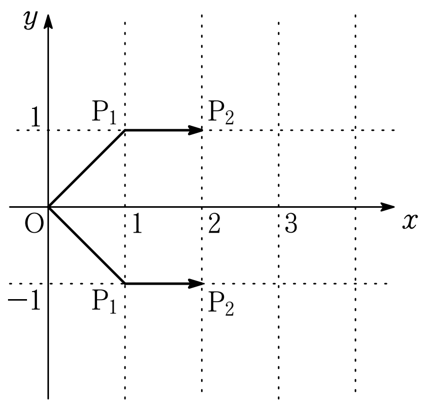
（ii）$P_1(1,\ -1)$, $P_2(2,\ -1)$

のときである.

x 軸に関する対称性から（ｉ),（ii）とも同じ確率になるので,

求める確率は,

$$a_2 = \frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

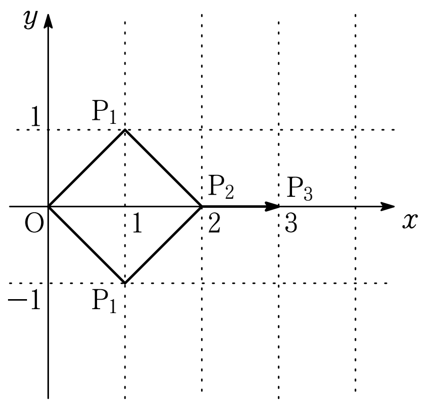


Ⓒ　a_3 について,

P_2, P_3 の y 座標が初めて等しくなるのは, P_1 の y 座標が 1 か -1 のいずれかで, P_2 の y 座標が 0 になり, P_3 の y 座標が 0 となるときであるから,

求める確率は,

$$a_3 = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times 2\times\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$



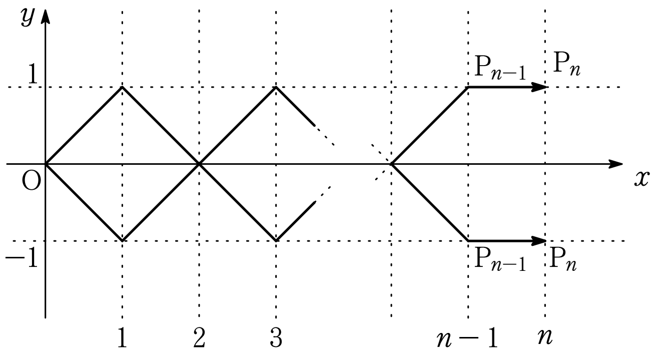
(2)　(1) より, P_{n-1}, P_n の y 座標が初めて等しくなるのは,

（ｉ）n が偶数のとき, $\begin{cases} P_{n-1}(n-1,\ 1) & ,\quad P_n(n,\ 1) \\ P_{n-1}(n-1,\ -1) & ,\quad P_n(n,\ -1) \end{cases}$

（ii）n が奇数のとき, $P_{n-1}(n-1,\ 0)$, $P_n(n,\ 0)$

の 2 通りが考えられる.

（ⅰ）のとき，



$$(k,\,0)\ \rightarrow\ (k+1,\,1)\ \rightarrow\ (k+2,\,0)\ \text{となる確率は，}\ \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

であり，

$$(k,\,0)\ \rightarrow\ (k+1,\,-1)\ \rightarrow\ (k+2,\,0)\ \text{となる確率も同様に，}\ \frac{1}{6}$$

となることから，これを $\dfrac{n-2}{2}$ 回 $(n\geqq 4)$ 繰り返した後

$$(n-2,\,0)\ \rightarrow\ (n-1,\,1)\ \rightarrow\ (n,\,1)\ \text{または，}(n-2,\,0)\ \rightarrow\ (n-1,\,-1)\ \rightarrow\ (n,\,-1)$$

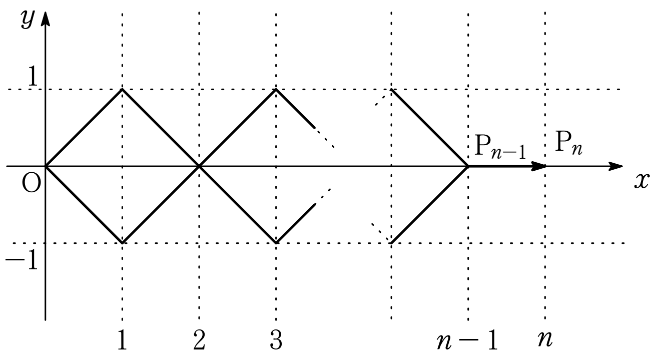
となればよいので，このときの確率は，

$$a_n=\left(\frac{1}{6}\times 2\right)^{\frac{n-2}{2}}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\quad (n\geqq 4)$$

これは $n=2$ のときも成り立つので，n が偶数のとき，

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}$$

（ⅱ）のとき，



$$(k,\,0)\ \rightarrow\ (k+1,\,1)\ \rightarrow\ (k+2,\,0)\ \text{となる確率は，}\ \frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

であり，

$$(k,\,0)\ \rightarrow\ (k+1,\,-1)\ \rightarrow\ (k+2,\,0)\ \text{となる確率も同様に，}\ \frac{1}{6}$$

となることから，これを $\dfrac{n-1}{2}$ 回 $(n\geqq 1)$ 繰り返した後

$$(n-1,\,0)\ \rightarrow\ (n,\,0)$$

となればよいので，このときの確率は，

$$a_n=\left(\frac{1}{6}\times 2\right)^{\frac{n-1}{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\quad (n\geqq 1)$$

以上より，求める確率は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n\ \text{が偶数のとき},\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}} \\ \boldsymbol{n\ \text{が奇数のとき},\ a_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◊ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

(1) は丁寧に図をかけば容易に解答できるはずです．（これはできなければいけません.）n 回目と $n+1$ 回目の y 座標が同じにならなければいけないので，動きが決まってしまうことに気付けたかどうかが大きな鍵を握ります．それがわかれば，後は正確な場合分けができるかどうかですね！