9 （オリジナル問題） 【難易度】… 標準

$AB = a$，$AC = 3$，$\angle BAC = 60^\circ$ である $\triangle ABC$ において，辺 AB 上に点 D をとり，AC を 3 : 2 に内分する点を E とする．線分 DE が $\triangle ABC$ の面積を 2 等分するとき，次の問いに答えよ．

(1) AD : DB を求めよ．

(2) 直線 DE と直線 BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表せ．

(3) $AP \perp AC$ となるとき，$\triangle ABP$ の面積を求めよ．

【テーマ】：ベクトルの計算

方針

まずは図をかくこと．(1) は辺の比を $s:(1-s)$ とおいて面積比から s を求める．(2) は，共線条件を利用する．(3) は $AP \perp AC$ という条件から a を求めよう．

基本的な公式を一通り確認できるので，欠落しているようなものがあった人は早急に使えるような練習をしておく必要がある．レベル的にはセンター試験と同程度か若干難しいぐらいなので，完答しなくてはいけない問題である．(2) は，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ で表す問題であるが，本問を解くには次のポイントを押させておく必要がある．

ポイント

平面上の任意の点は２つの１次独立なベクトルを用いて１通りに表される

したがって，解答にもあるように $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$ とおくことができるのである．自分で設定しなければいけない状況が出てくるので，しっかりとした練習をつんでおく必要がある．

♣ ♠

解答

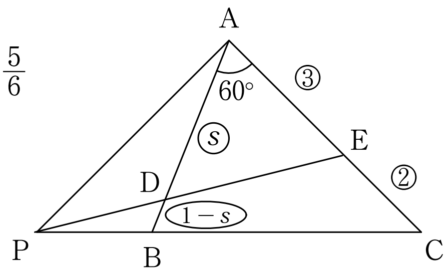
(1) AD : DB $= s : 1-s$ $(0<s<1)$ とすると，$AD = as$ である．

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot a\cdot 3\cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$$
$$\triangle ADE = \frac{1}{2}\cdot as\cdot 3\cdot \frac{3}{5}\cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{20}as$$

$\triangle ABC = 2\triangle ADE$ より，

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}a = 2\cdot\frac{9\sqrt{3}}{20}as \iff s = \frac{5}{6}$$

よって，**AD : DB = 5 : 1**……(答)



(2) $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC}$ とおくと， ☞ 解説

$$\overrightarrow{AP} = t\cdot\frac{6}{5}\overrightarrow{AD} + (1-t)\cdot\frac{5}{3}\overrightarrow{AE}$$

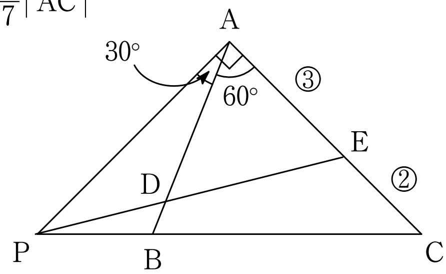
3 点 P, D, E は一直線上にあるので，

$$\frac{6}{5}t + \frac{5}{3}(1-t) = 1 \iff t = \frac{10}{7}$$

ゆえに，$\boldsymbol{\overrightarrow{AP} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}}$……(答)

(3) $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AC}$ より，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC} &= \left(\frac{10}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{10}{7}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{3}{7}|\overrightarrow{AC}|^2\\ &= \frac{10}{7}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ-\frac{3}{7}|\overrightarrow{AC}|^2\\ &= \frac{10}{7}\cdot a\cdot 3\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{7}\cdot 9\\ &= \frac{15}{7}a-\frac{27}{7}\end{aligned}$$



より，$\frac{15}{7}a-\frac{27}{7}=0$ であればよいから，$a=\frac{9}{5}$ である．

したがって，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2 &= \left|\frac{10}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right|^2\\ &= \frac{1}{49}\left(100|\overrightarrow{AB}|^2-60\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+9|\overrightarrow{AC}|^2\right)\\ &= \frac{1}{49}\left(100\cdot\frac{81}{25}-60\cdot\frac{9}{5}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+9\cdot 9\right)\\ &= \frac{1}{49}(4\cdot 81-81\cdot 2+81)\\ &= \frac{81}{49}(4-2+1)\\ &= \frac{81}{49}\cdot 3\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AP}|>0$ より，$|\overrightarrow{AP}|=\frac{9}{7}\sqrt{3}$ となるので，

$$\triangle APB=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{81\sqrt{3}}{140}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

別解

面積比を利用しても求めることができます．

(2) より，$\overrightarrow{AP}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$ であるから，$\overrightarrow{AB}=\frac{7}{10}\overrightarrow{AP}+\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$ となるので，PB : BC = 3 : 7 である．

(1) より，

$$\triangle ABC=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{9}{5}=\frac{27\sqrt{3}}{20}$$

であり，△ABC と △ABP は高さが同じであるから，底辺の比が面積比と一致する．ゆえに，

$$\triangle ABC : \triangle ABP = BC : PB = 7 : 3$$

となる．したがって，求める面積は，

$$\triangle ABP=\frac{3}{7}\triangle ABC=\frac{3}{7}\cdot\frac{27\sqrt{3}}{20}=\boldsymbol{\frac{81\sqrt{3}}{140}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

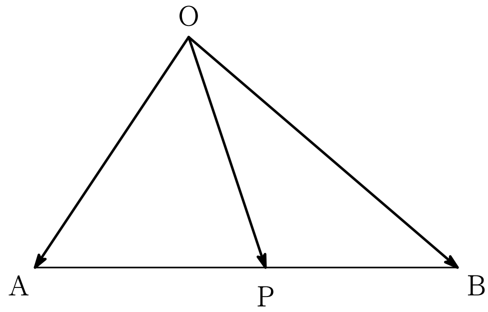
である．

◇ ♡

解説

点 P は直線 BC 上にあるので，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$ とおけるが，線分 BC 上にあるわけではないので，$0<t<1$ という条件を付けてはいけません．

【共線条件】



平面上に三角形 OAB があり，点 P は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で表される点であるとする．このとき，
3 点 A, B, P が一直線上にあれば，

$$s+t=1$$

が成り立つ．
この条件を使うにあたって大切なことは，2 点ある．

（ｉ） **始点は同じか．**
（ii） **終点は一直線上にあるか．**

この 2 点を確認してから用いるようにしよう．本問のように，（ii）がみたされていなくても，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のような条件を用いることで終点を別の点に変更すれば，一直線上に並ぶことがある．