29 （’99　東京工業大） 【難易度】… やや難

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}\,dx$ を求めよ．

【テーマ】：積分不等式

方針

極限はとりあえず無視して，まずは積分部分を何とかしてみましょう．$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}\,dx$ とおいて，積分計算を行います．しかし，この積分の値は求めることができないので，ある程度計算したら，この積分を不等式を使って評価しなければいけません．

素直に積分が計算できればよいのですが，この積分は計算できません．そこで，不等式を使ってこの積分を評価する必要があります．（評価するとは，簡単にいえば不等式を立式するということです．）積分の値が求められない極限はこの不等式による評価をしてはさみうちの原理を利用します．積分不等式を立式する際には，積分区間$\left(\text{本問では } 0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$で成り立つ不等式をまず探すことから始めます．

ポイント

積分不等式を作るときは，積分区間に着目して不等式を立式する

♣ ♠

解答

$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{1+x}\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos 2nx)}{1+x}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+x}\,dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\Big[\log|1+x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx\\
&= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx
\end{aligned}$$

ここで，$J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}
J_n &= \left[\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2n}\cdot\sin 2nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{2n(1+x)^2}\,dx\\
&= \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

$-1\leqq\sin 2nx\leqq 1$ より，

$$-\frac{1}{(1+x)^2}\leqq\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\leqq\frac{1}{(1+x)^2}$$

が成り立つので，

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

$$-\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx \leqq \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\,dx \leqq \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+x)^2}\,dx = 0$ となることから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = 0$ となる．よって，

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◊ ♡

解説

この問題の難しいところは，積分不等式の立式です．与えられた積分から作ってもはさみうちの原理で値が絞れないので，ある程度式を変形する必要があるのです．では，どうやってこのような解答を思いつけばよいのでしょうか？ある程度の経験が必要ですが，もちろんいくつかのポイントがあるので，そこを一つ一つ押さえていくことが大切なのです．では，どのような思考回路でこの解答ができあがるかをシミュレーションしてみましょう．

思考回路（その１）

まずは，積分を計算してみよう！！…求められない…最終的には極限値が聞かれているから，これははさみうちの原理を利用するのかな？もしもはさみうちの原理を利用するのなら不等式で評価しないといけないからまずは不等式を作ってみよう！積分不等式を作る元になる不等式は，積分区間で成り立つようなものを作らないといけないから，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で不等式を作ろう！！ $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $0 \leqq \sin^2 nx \leqq 1$ となるので，$0 \leqq \frac{\sin^2 nx}{1+x} \leqq \frac{1}{1+x}$ となるなぁ…あれ！？まてよ，これじゃあ積分不等式を作っても最右辺に n がないから，はさみうちの原理が使えない…このままでは，駄目かぁ…じゃあ積分を少し計算するしかないか…

という具合で，まずは積分を計算しようという思考に至ります．では，続きを…

思考回路（その２）

積分計算をするときは，積より和の形が基本だから，まずは

$$\sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}$$

とするのが自然だな！次は，少しだけ計算できる部分が出てきたから計算しちゃえ！（もしも駄目ならやり直せばいいし…）

$$I_n = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx}{1+x}\,dx$$

ここまで来たけど，最後の積分計算はやっぱりできない形だなぁ〜…しかもこれで不等式作ってもさっきと同じで n なんて出てこないしなぁ〜…

さて，ここで一端手が止まってしまうはずです．ここからの発想が大切！！

思考回路（その３）

なんとかして $\frac{1}{n}$ ってのが出せれば，はさみうちの原理が使えるんだけどなぁ〜…んっ！？ $\cos 2nx$ って積分したら $\frac{1}{2n}\sin 2nx$ じゃん！そうか！ってことはここで部分積分を使えば，n が分母に現れる！！よし，やってみよう！

$$J_n = \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{(1+x)^2}\,dx$$

やっぱり！ n が分母に来たぞ！あとは，不等式を作って，積分不等式に持っていけばできそうだなぁ！！

ってな具合になります．後は積分不等式を勉強している人なら，解答の流れが自然にでてくるでしょう．でてこない人は積分不等式の勉強不足ですからこれから演習を積んでください．