5 （′03　立正大） 【難易度】 … 標準

6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 個の数字を選んで 3 桁の整数を作る．ただし，百の位に 0 がきてはいけない．

（1） 作られる整数は全部で何個あるか．

（2） 奇数は全部で何個あるか．

（3） 3 の倍数は全部で何個あるか．

（4） 作られる整数全部の和を求めよ．

【テーマ】：条件をみたす３桁の整数とその和

方針

(3) で 3 の倍数の個数を求める方法は，すべての場合を書き出す方法と余りに着目する方法があります．整数全部の和は，各位ごとの和を考えます．

♣ ♠

解答

（1） 百の位は 1〜5 の 5 通り．

十の位は 0〜5 のうち百の位で用いたものを除く 5 通り

一の位は 0〜5 のうち百・十の位で用いたものを除く 4 通り

よって，求める整数の個数は，$5 \times 5 \times 4 =$ **100(個)**……(**答**)

（2）

一の位は 1, 3, 5 の 3 通り

百の位は 1〜5 のうち一の位で用いたものを除く 4 通り

十の位は 0〜5 のうち百・一の位で用いたものを除く 4 通り

よって，求める整数の個数は，$3 \times 4 \times 4 =$ **48(個)**……(**答**)

（3） 3 の倍数となるのは各位の数の和が 3 の倍数となるときであり，その組合せは

$\{0, 1, 2\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 1, 5\}, \{0, 4, 5\}$

$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}$

の 8 組である．

0 を含む組 1 つに対して，$2 \times 2 \times 1 = 4$ 通りの数ができるので，$4 \times 4 = 16$ 通り

0 を含まない組 1 つに対して，$3! = 6$ 通りの数ができるので，$6 \times 4 = 24$ 通り

よって，求める整数の個数は，$16 + 24 =$ **40(個)**……(**答**)

（4） 百の位が 1 である数は，$5 \times 4 = 20$ 通りあり，2〜5 についても同様なので，作られる整数の百の位の和は，

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 20 = 15 \times 20 = 300$$

十の位が 1 である数は，$4 \times 4 = 16$ 通りあり，2〜5 についても同様なので，作られる整数の十の位の和は，

$$(1+2+3+4+5)\times 16 = 15\times 16 = 240$$

一の位の和も十の位と同様に 240 である．
ゆえに，求める総和は，

$$300\times 100 + 240\times 10 + 240 = \mathbf{32640}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

別解

(3) は，余りに着目すると次のような解答になります．

0〜5 を 3 で割った余りが 0, 1, 2 となる数の集合をそれぞれ R_0, R_1, R_2 とすると，

$$R_0 = \{0,\ 3\},\ \ R_1 = \{1,\ 4\},\ \ R_2 = \{2,\ 5\}$$

となる．異なる 3 つの数の和が 3 の倍数になるためには，R_0, R_1, R_2 の各集合から要素を 1 つずつ取り出せばよい．

R_1, R_2 からの選び方は，$2\times 2 = 4$ 通り．

その各々に対して，

R_0 から 3 を選ぶとき 3 数の並べ方は，$3! = 6$ 通り．したがって，$4\times 6 = 24$ 通り．

R_0 から 0 を選ぶとき 3 数の並べ方は，$2\times 2 = 4$ 通り．したがって，$4\times 4 = 16$ 通り．

よって，求める場合の数は，$24 + 16 = $ **40(個)**……(**答**)

◇ ♡

解説

(3) の問題では，余りに着目する点がポイントです．この解法であれば，すべて書き出す必要がないため，数え漏れがある程度防げるでしょう．4 の倍数に関しても同じようなことがいえます．