14 （′05　奈良女子大・改） 【難易度】 … 標準

実数 a, b に対して，x に関する方程式

$$\cos 2x - 4a\cos x + 2b + 1 = 0$$

を考える．ただし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ とする．

（1） $t = \cos x$ とおくとき，与えられた方程式を t で表せ．

（2） 与えられた方程式が異なる 4 つの実数解をもつための a, b の条件を求めよ．

（3） 座標平面において，(2) で求めた条件をみたす点 (a, b) の範囲を図示せよ．

【テーマ】：三角方程式の実数解の個数

方針

誘導がついているので，それにしたがえば方針は立てやすいでしょう．ポイントは，t の値 1 つに対して x の値が 1 つとは限らないところです．t と x の対応をきちんと調べておくことが必要です．

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ となっているので，

$x = \pi$ のとき，　t の値 1 つに対して，x の値は 1 つ

$x \neq \pi$ のとき，　t の値 1 つに対して，x の値は 2 つ

ということに十分な注意が必要です．sin や cos で置き換えをしたときは常にこのような対応を考えることが必要である点に注意しましょう．

♣ ♠

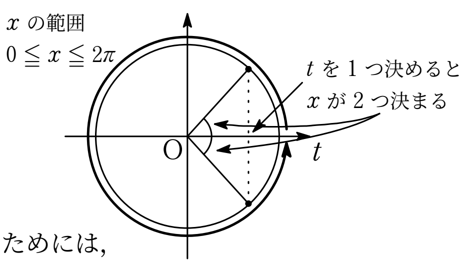
解答

（1） $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ であるから，

$$\cos 2x - 4a\cos x + 2b + 1 = 0 \iff 2\cos^2 x - 4a\cos x + 2b = 0$$

$t = \cos x$ とおくと，

$$\boldsymbol{2t^2 - 4at + 2b = 0} \cdots\cdots\text{（答）}$$



（2） $t = \cos x$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ より，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり，

$x = \pi$ のとき，　t の値 1 つに対して，x の値は 1 つ

$x \neq \pi$ のとき，　t の値 1 つに対して，x の値は 2 つ

存在する．よって，与えられた方程式が異なる 4 つの実数解をもつためには，

$$2t^2 - 4at + 2b = 0$$

が，$-1 < t \leqq 1$ の範囲に異なる 2 つの実数解をもてばよい．この式の左辺を $f(t)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^2 - 4at + 2b \\ &= 2(t-a)^2 - 2a^2 + 2b \end{aligned}$$

であることから，

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

（ｉ） $-1<a \leqq 1$ ……①

（ii） $f(-1)>0$ かつ $f(1) \leqq 0$

（iii） $-2a^2+2b<0$

であればよい．

（ii）のとき，

$$f(-1)=2+4a+2b>0 \iff b>-2a-1 \quad \cdots\cdots②$$

$$f(1)=2-4a+2b \leqq 0 \iff b \leqq 2a-1 \quad \cdots\cdots③$$

（iii）のとき，$b<a^2$…④

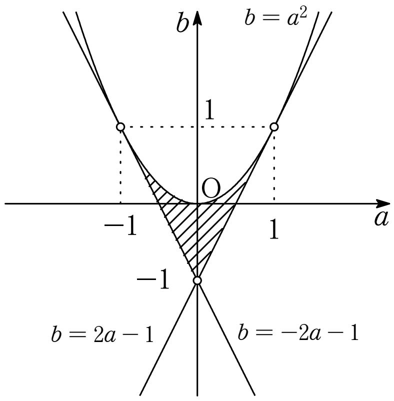
以上より，①〜④ から，a, b の条件は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{-1<a \leqq 1} \\ \boldsymbol{b>-2a-1} \\ \boldsymbol{b \leqq 2a-1} \\ \boldsymbol{b<a^2} \end{cases} \quad \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(3) (2) より，点 (a, b) の存在範囲は，下図の斜線部分である．

境界は，$b=2a-1$ 上の点 ($(1, 1)$, $(0, -1)$ を除く) のみ含み，他は含まない．



◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

前述したように本問は，t と x の関係がしっかりと把握できれば，2 次関数の解の配置問題となります．領域の図示では，境界線上の点を含むか否かを正確に述べる必要があるとともに，除く点は白丸などを用いて図示できるようにしておきましょう．