

15 ('04 防衛大)

【難易度】…標準

定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ について、次の問いに答えよ。ただし、 n は 0 以上の整数とする。

(1) $n \geq 2$ として、 $I_n = K_n I_{n-2}$ となる K_n を求めよ。

(2) $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$ を求めよ。

(3) $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ を求めよ。

【テーマ】: 定積分と漸化式

方針

部分積分法を用いて、 I_n に関する漸化式を立式します。

解答

(1) 部分積分法を用いて、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{n-1} x dx \\ &= \left[-\cos x \cdot \sin^{n-1} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1) \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right\} \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

$n \neq 0$ より、 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ となるので、 $K_n = \frac{n-1}{n}$ ……(答)

(2) (1) より、

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{4}{5} I_3 \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 \\ &= \frac{8}{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{8}{15} \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{8}{15} \{0 - (-1)\} \\ &= \frac{8}{15} \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) (1) より,

$$\begin{aligned} I_6 &= \frac{5}{6} I_4 \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} I_2 \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{5}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{5}{32} \pi \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$



解説

本問のように、定積分が n に依存しているような問題は、漸化式を作って解答する場合がありますので、代表的な問題には当たっておくとよいでしょう。例えば、

$$\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx, \int \tan^n x dx, \int (\log x)^n dx \quad (\text{積分区間は省略})$$

のようなものです。大抵の問題は、誘導形式で出題されますが、難関大学や難関学部を志望している人は、誘導なしでも解けるようにしておきましょう。