22 （'04　麻布大） **【難易度】** … **標準**

自然数 x を 9 で割ったときの余りを $R(x)$ で表すことにする.

（1）　$R(2^3)$ および $R(2^6+2^7+2^8)$ を求めよ.

（2）　n を正の整数とするとき，$R(2^n)$ の取り得る値をすべて求めよ.

（3）　n を正の整数とするとき，$R(2^n+2^{2n})$ の取り得る値をすべて求めよ.

【テーマ】：整数問題

方針

周期性を見抜くことがポイントです．$R(x)$ は x を 9 で割った余りを表すので，$0 \leqq R(x) \leqq 8$ であることにも注意が必要です.

余りについての次の基本事項を知っておきましょう.

（ｉ） 和の余りは，余りの和の余り

（ii） 積の余りは，余りの積の余り

簡単に証明しておきましょう.

【証明】

整数 P, Q を，整数 a で割ったときの商をそれぞれ S, T，余りをそれぞれ R_1, R_2 とすると，

$$P = aS + R_1,\ Q = aT + R_2$$

と表すことができる.

$$P+Q = a(S+T) + R_1 + R_2$$

$$PQ = a^2ST + (SR_2 + TR_1)a + R_1R_2$$

となるので，$P+Q$ を a で割った余りは，R_1+R_2 になる.

ここで，$a \leqq R_1+R_2$ のときは，さらに R_1+R_2 を a で割ればよいので，和の余りは，余りの和の余りと等しいことがわかる．$a > R_1+R_2$ のときは，R_1+R_2 がそのまま余りとなる．積の場合も同様の議論で示される.

以上より，示された. **（証明終）**

具体的に，数値を代入してみると，次のようになります．$P=19, Q=13, a=7$ として，計算してみましょう.

$P+Q$ すなわち 32 を 7 で割ると，余りは 4 です．また，PQ すなわち 247 を 7 で割ると，余りは 2 です.

さて，証明した事実を使って計算すると，次のようになります.

P を 7 で割った余りは 5 で，Q を 7 で割った余りは 6 ですから，

$P+Q$ を 7 で割った余りは，$5+6$ を 7 で割った余り 4 に等しく，

PQ を 7 で割った余りは，$5 \cdot 6$ を 7 で割った余り 2 に等しくなります.

これは，先に計算した値と一致していることがわかると思います.

♣ ♠

解答

(1) $R(2^3) = \mathbf{8}$……(**答**)

$2^6 + 2^7 + 2^8$ を 9 で割った余りは，2^6, 2^7, 2^8 をそれぞれ 9 で割った余りの和を 9 で割った余りに等しいので，

$$\begin{aligned} R(2^6 + 2^7 + 2^8) &= R(R(2^6) + R(2^7) + R(2^8)) \\ &= R(1 + 2 + 4) \\ &= \mathbf{7}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

(2) $R(2^{n+1})$ は $2R(2^n)$ を 9 で割った余りと等しい．

$n = 1$ のとき　$R(2^1) = 2$

$n = 2$ のとき　$R(2^2) = 4$

$n = 3$ のとき　$R(2^3) = 8$

$n = 4$ のとき　$R(2^4) = 7$

$n = 5$ のとき　$R(2^5) = 5$

$n = 6$ のとき　$R(2^6) = 1$

よって，$R(2^7) = 2R(2^6) = R(2^1)$ となるから，

$$R(2^{n+6}) = R(2^n)$$

であることがわかる．よって，$R(2^n)$ のとり得る値は，$\mathbf{1, 2, 4, 5, 7, 8}$……(**答**)

(3) $R(2^n + 2^{2n}) = R(R(2^n) + R(2^{2n}))$

$R(2^{2n})$ は $\{R(2^n)\}^2$ を 9 で割った余りに等しいので，$R(2^n + 2^{2n})$ のとり得る値は次の表のようになる．

n	1	2	3	4	5	6
$R(2^n)$	2	4	8	7	5	1
$R(2^{2n})$	4	7	1	4	7	1
$R(2^n + 2^{2n})$	6	2	0	2	3	2

よって，$R(2^n + 2^{2n})$ のとり得る値は，$\mathbf{0, 2, 3, 6}$……(**答**)

◇ ♡

解説

記号の意味を正確に理解しなければいけません．$R(x)$ は合同式でいうと，9 を法とする合同式を考えていることになります．大学入試では，しばしばこのように合同式を別の形に変えて出題されることもあるので，余りに関する基礎知識を知っておかなければなりません．