25 （'00　筑波大） **【難易度】** … 標準

関数 $f_n(x)=\sin^{n+2}x+2\cos^{n+2}x$ $(n=1,2,\cdots)$ について，次の問いに答えよ．

（1） 閉区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ における $f_n(x)$ の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ．

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}$ を求めよ．

【テーマ】：三角関数の最大値・最小値

方針

定石通り，$f_n'(x)$ を求めて増減表をかき，最大値と最小値を求めますが，最小値をとるときの x の値を求めることができません．このようなときは，その x の値を α とおいて処理します．

解答

（1） 与えられた関数 $f_n(x)$ を x で微分すると，

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= (n+2)\sin^{n+1}x\cdot\cos x+2(n+2)\cos^{n+1}x\cdot(-\sin x) \\ &= (n+2)\sin x\cos x(\sin^n x-2\cos^n x) \end{aligned}$$

よって，$f_n'(x)=0$ のとき，

$$\sin x=0,\quad \cos x=0,\quad \sin^n x-2\cos^n x=0$$

であり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であることから，$\sin x=0,\ \cos x=0$ より，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ を得る．

$$\sin^n x-2\cos^n x=0 \iff \sin^n x=2\cos^n x \iff \tan^n x=2 \quad (\because\ \cos x\neq 0)$$

となるので，これをみたす x の値はただ一つ存在することから，その値を α とおくと，次の増減表を得る．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$	0	$-$		$+$	0
$f_n(x)$	2	↘	L_n	↗	1

ここで，$x=\alpha$ のとき，すなわち $f_n(\alpha)$ の値を求めよう．α は $\sin^n\alpha=2\cos^n\alpha$……① をみたすので，

$$\begin{aligned} f_n(\alpha) &= \sin^{n+2}\alpha+2\cos^{n+2}\alpha \\ &= \sin^n\alpha\cdot\sin^2\alpha+2\cos^n\alpha\cdot\cos^2\alpha \\ &= 2\cos^n\alpha\cdot\sin^2\alpha+2\cos^n\alpha\cdot\cos^2\alpha \\ &= 2\cos^n\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^n\alpha \end{aligned}$$

また，① から，$\tan^n\alpha=2$ より，$\tan\alpha=\sqrt[n]{2}$ であるから，

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \iff \cos^2\alpha = \frac{1}{1+(\sqrt[n]{2})^2} \quad \therefore \ \cos^n\alpha = \left(\frac{1}{1+2^{\frac{2}{n}}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

となるので，求める最大値と最小値は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{M_n = 2} \\ \boldsymbol{L_n = 2\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2）（1）より，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}} \\ &= \lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2^0\left(1+2^0\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

◇ ♡

解説

関数の最大値・最小値を求めるときは，微分をして増減を調べ，増減表から求めるのが定石ですが，いつも導関数の値を 0 にする x の値が求まるわけではありません．このような問題では，まず導関数を 0 にする x の値が何個あるかを調べて，その値を α などの文字で置きます．ただし，α は自分で勝手においた文字なので，基本的に答えで α を用いることはできません．したがって，最後に α を消すために，α のみたすべき式を使って，α を消去するのです．このような計算を伴う問題はよく出題されるので，必ず一度はやっておきたい問題です．