

35

('05 九州歯科大)

【難易度】… 標準

二等辺三角形 OAB において、 $|\vec{OA}| = |\vec{AB}| = 3$ 、 $|\vec{OB}| = 2$ 、 $\cos \angle AOB = \frac{1}{3}$ とする。 OA を $s : (1-s)$ に内分する点を D とし、 OB を $t : (1-t)$ に内分する点を E とする。さらに、 AB の中点を F とし、 OF と DE の交点を G とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $|\vec{OG}| : |\vec{GF}| = a : (1-a)$ 、 $|\vec{DG}| : |\vec{GE}| = b : (1-b)$ とおくと、 a と b を s と t を用いて表せ。
- (2) 線分 DE の長さ L を s と t を用いて表せ。
- (3) 点 D と E は、それぞれ OA と OB 上を、線分 DE が三角形 OAB の面積を二等分するように動くとする。このとき、 t を s を用いて表せ。さらに、線分 DE の長さ L の最小値を求めよ。

【テーマ】：線分比と面積の最小値

方針

前半は、内分の公式を利用して計算します。(3) は (2) で求めた L と (3) で求めた s, t の関係式を利用して1文字消去して相加平均・相乗平均の関係を用います。

解答

- (1) 点 F は線分 AB の中点であり、 $OG : GF = a : (1-a)$ より、

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= a\vec{OF} \\ &= a \cdot \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \\ &= \frac{a}{2}\vec{OA} + \frac{a}{2}\vec{OB} \end{aligned}$$

また、 $\triangle ODE$ で、 $DG : GE = b : (1-b)$ より、

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= (1-b)\vec{OD} + b\vec{OE} \\ &= (1-b)s\vec{OA} + bt\vec{OB} \end{aligned}$$

\vec{OA} 、 \vec{OB} は1次独立であるから、

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = (1-b)s & \dots\dots \text{①} \\ \frac{a}{2} = bt & \dots\dots \text{②} \end{cases}$$

①、②より、

$$bt = (1-b)s \iff bt + bs = s \iff b = \frac{s}{s+t}$$

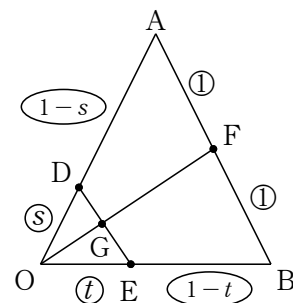
であり、②より、

$$\frac{a}{2} = \frac{st}{s+t} \iff a = \frac{2st}{s+t}$$

ゆえに、 $a = \frac{2st}{s+t}$ 、 $b = \frac{s}{s+t}$ ……(答)

- (2) $\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD}$ であるから、

$$|\vec{DE}|^2 = |\vec{OE} - \vec{OD}|^2$$



$$\begin{aligned}
&= |t\vec{OB} - s\vec{OA}|^2 \\
&= t^2|\vec{OB}|^2 - 2st\vec{OA} \cdot \vec{OB} + s^2|\vec{OA}|^2 \\
&= 4t^2 - 2st|\vec{OA}||\vec{OB}|\cos\angle AOB + 9s^2 \\
&= 4t^2 - 2st \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + 9s^2 \\
&= 4t^2 - 4st + 9s^2
\end{aligned}$$

$$|\vec{DE}| > 0 \text{ より, } |\vec{DE}| = L = \sqrt{4t^2 - 4st + 9s^2} \dots\dots (\text{答})$$

(3) $\triangle OAB$, $\triangle ODE$ の面積は, それぞれ

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \angle AOB$$

$$\triangle ODE = \frac{1}{2} |\vec{OD}| |\vec{OE}| \sin \angle AOB = \frac{1}{2} st |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \angle AOB$$

であり, 条件より, $\triangle OAB = 2\triangle ODE$ であるから,

$$\frac{1}{2} |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \angle AOB = 2 \cdot \frac{1}{2} st |\vec{OA}| |\vec{OB}| \sin \angle AOB \iff st = \frac{1}{2} \dots\dots \textcircled{3}$$

よって, $t = \frac{1}{2s}$ ($\because s \neq 0$) となるので, (2) で求めた L に代入すると,

$$L = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4s^2} - 4s \cdot \frac{1}{2s} + 9s^2} = \sqrt{9s^2 + \frac{1}{s^2} - 2}$$

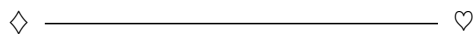
となる. $s^2 > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係より,

$$9s^2 + \frac{1}{s^2} \geq 2\sqrt{9s^2 \cdot \frac{1}{s^2}} = 6$$

等号は, $9s^2 = \frac{1}{s^2}$ すなわち $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because \textcircled{3}$) のとき, 成立する. よって,

$$9s^2 + \frac{1}{s^2} - 2 \geq 4 \text{ が成り立ち, } \sqrt{9s^2 + \frac{1}{s^2} - 2} \geq 2 \text{ となるので, } L \geq 2$$

を得る. ゆえに, $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき, L の最小値は $2 \dots\dots (\text{答})$ である.



解説

(3) のように, 三角形の面積を二等分するときの線分 DE の長さの最小値を求める問題は, 様々な大学で類題が出題されています. (例: 1999 年東京工業大学・2005 年名古屋女子大学) 最小値を求めるときに『相加平均・相乗平均の関係』を用いることがポイントになります.