39 （'96　北海道大） **【難易度】** … 標準

平面上で原点 O と異なる定点を $A(a,\,b)$ とする．点 $P(x,\,y)$ は $\overrightarrow{OA}$ から $\overrightarrow{OP}$ へはかった角 θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる範囲にあるものとし，$w=\dfrac{ay-bx}{ax+by}$ とおく．2 点 X, Y の間の距離を XY で表すものとする．

（1）　$ay-bx$ および w を OA, OP, θ で表せ．

（2）　定数 k を $0<k<\mathrm{OA}$ とする．$0<\mathrm{AP}\leqq k$ であるとき，w のとりうる値の範囲を $a,\,b,\,k$ を用いて表せ．

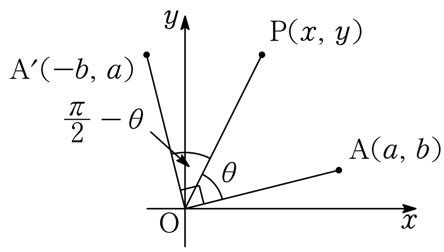
【テーマ】：ベクトルと三角関数

方針

与えられた式が何を意味しているのかをよく考えて，式を作っていきます．(1) は内積の計算を利用します．

♣ ♠

解答



（1）　右図のように，点 A を原点周りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転移動した点 A′ をとると，$\mathrm{OA'}=\mathrm{OA}$ であり，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OA'}$ とのなす角は $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ となることから，

$$\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OP}=\left|\overrightarrow{OA'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\iff\quad ay-bx=\mathbf{OA\cdot OP\cdot\sin\boldsymbol{\theta}}\cdots\cdots(\text{答})$$

となる．さらに，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=ax+by$$

より，

$$w=\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta}{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}=\frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cdot\sin\theta}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\theta}=\mathbf{\tan\boldsymbol{\theta}}\ \left(\mathbf{0<\boldsymbol{\theta}<\frac{\boldsymbol{\pi}}{2}}\right)\cdots\cdots(\text{答})$$

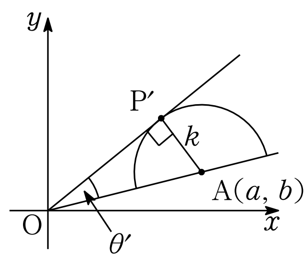
である．

（2）　$\overrightarrow{AP}=(x-a,\,y-b)$ より，$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ であるから，

$$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2=\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

また，$0<\mathrm{AP}\leqq k$ より，$0<\mathrm{AP}^2\leqq k^2$ であるから，

$$0<(x-a)^2+(y-b)^2\leqq k^2$$



となる．$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であることに注意すると，これは点 P が点 A を中心とし，半径 k 以下の円で直線 OA より上側の領域内を動くことを表している．点 A を中心とし，半径 k の円を C とするとき，右図のように，円 C と直線 OP が接するときの接点を P′ とし，そのときの $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OP'}$ のなす角を θ' とすれば，

$$\tan\theta'=\frac{\mathrm{AP'}}{\mathrm{OP'}}$$

が成り立つ．ここで，△OAP′ で三平方の定理より，

$$\mathrm{OP'}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AP'}^2}=\sqrt{a^2+b^2-k^2}$$

であるから，

$$\tan\theta' = \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2-k^2}}$$

となるので，$0<\theta \leqq \theta'$ と $y=\tan x$ が単調増加関数であることから，

$$0<\tan\theta \leqq \tan\theta' = \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2-k^2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{0<w \leqq \frac{k}{\sqrt{a^2+b^2-k^2}}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇ ♡

解説

ちょっとやりにくく感じる問題です．まず，与えられた式が何を表しているかをよく考えないと，方針すら浮かびません．(1) は，$ay-bx$ や $ax+by$ が内積を表しているということに気が付かなければ難しいでしょうし，(2) は (1) の結果を踏まえて $\tan\theta$ をどう表現するかを思案しなければいけません．そのためには，点 A が定点であることに注意して点 P がどのような領域を動くのかを与えられた関係式 $0<\mathrm{AP}\leqq k$ から導き出す必要があります．分かってしまえばそれほど難しくありませんが，典型問題ばかりをやってきた受験生にはやりにくく難しく感じる問題でしょう．