

43 ('07 宮崎大)

【難易度】…標準

最初 A, B の 2 人は数直線上の原点にいるとする . はじめに A が 2 回サイコロを投げる . 1 回サイコロを投げるごとに , 現在いる地点から , サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を正の方向に 1 進み , 5 または 6 であれば正の方向に 2 進む .

次に B が 2 回サイコロを投げる . 1 回サイコロを投げるごとに , 現在いる地点から , サイコロの目が 4 以下であれば数直線上を負の方向に 1 進み , 5 または 6 であれば正の方向に 3 進む .

このように A, B がそれぞれ 2 回ずつサイコロを投げ , 進み終わったときの数直線上の 2 人の位置をそれぞれ a, b とする . このとき , 次の各問いに答えよ .

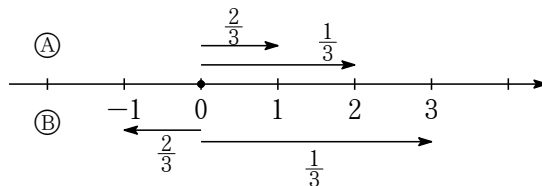
- (1) $a \leq b$ となる確率を求めよ .
- (2) $a - b = c$ とするとき , c の期待値を求めよ .

【テーマ】: 移動の確率

方針

a, b のとり得る値をすべて書き出し , そのときの確率を表にして考えるとわかりやすくなります . 漏らさないようにすべての場合を考えましょう .

解答



- (1) 題意より , サイコロを 2 回投げたときの a, b のとり得る値は ,

$$a = 2, 3, 4, \quad b = -2, 2, 6$$

であるから , それぞれの確率を表にすると次のようになる .

a	2	3	4
確率	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

b	-2	2	6
確率	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$a \leq b$ となる場合を考える .

- (i) $a = 2$ のとき , $b = 2, 6$ であればよいことから , このときの確率は ,

$$\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{20}{81}$$

- (ii) $a = 3$ のとき , $b = 6$ であればよいことから , このときの確率は ,

$$\frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{81}$$

- (iii) $a = 4$ のとき , $b = 6$ であればよいことから , このときの確率は ,

$$\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$$

ゆえに , 求める確率は ,

$$\frac{20}{81} + \frac{4}{81} + \frac{1}{81} = \frac{25}{81} \dots\dots(\text{答})$$

(2) $a = n$ となる確率を $P(a = n)$ 等と書くことにする. c のとり得る値は,

$$c = -4, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 6$$

であるから, (1) の表を利用して計算すると

$$P(c = -4) = P(a = 2) \times P(b = 6) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{81}$$

$$P(c = -3) = P(a = 3) \times P(b = 6) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{4}{81}$$

$$P(c = -2) = P(a = 4) \times P(b = 6) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$$

$$P(c = 0) = P(a = 2) \times P(b = 2) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

$$P(c = 1) = P(a = 3) \times P(b = 2) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

$$P(c = 2) = P(a = 4) \times P(b = 2) = \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{81}$$

$$P(c = 4) = P(a = 2) \times P(b = -2) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

$$P(c = 5) = P(a = 3) \times P(b = -2) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

$$P(c = 6) = P(a = 4) \times P(b = -2) = \frac{1}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{81}$$

となる. ゆえに, 求める期待値を E とすると,

$$\begin{aligned} E &= (-4) \times \frac{4}{81} + (-3) \times \frac{4}{81} + (-2) \times \frac{1}{81} + 0 \times \frac{16}{81} + 1 \times \frac{16}{81} + 2 \times \frac{4}{81} + 4 \times \frac{16}{81} \\ &\quad + 5 \times \frac{16}{81} + 6 \times \frac{4}{81} \\ &= \frac{1}{81} (-16 - 12 - 2 + 16 + 8 + 64 + 80 + 24) \\ &= \frac{162}{81} \\ &= 2 \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$



解説

難易度は, 標準 としましたが, 基本 に近いものだと考えてください. 内容的にはそれほど難しくなく丁寧にすべての場合を書き出すことさえできれば, あとは計算問題になります.

なお, $a = 3$ の確率と $b = 2$ の確率は反復試行の確率を考えて,

$${}_2C_1 \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{9}$$

として計算します.