2 （′83　京都府立大） 【難易度】 … 標準

等式 $a_n+b_n\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^n$ によって定められる自然数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ について，

(1) $a_{n+1}=2a_n+5b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ を証明せよ.

(2) $a_n-b_n\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^n$ を証明せよ.

(3) $L=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ.

(4) (3) の L について，$n\geqq 3$ のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-L\right|<0.001$$

【テーマ】：数列の極限

方針

(1) は，漸化式を作り，(2) は数学的帰納法で証明します. (3) は具体的に a_n, b_n を求めて極限をとっても計算できますが，はさみうちの原理を用いることもできます. (4) は具体的な値を用いて評価しなければいけないので，うまく不等式を作っていくため試行錯誤しましょう.

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$a_n+b_n\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^n$ …… ① とおく．この式において n に $n+1$ を代入すると，

$$\begin{aligned}a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{5}&=(2+\sqrt{5})^{n+1}\\&=(2+\sqrt{5})(2+\sqrt{5})^n\\&=(2+\sqrt{5})(a_n+b_n\sqrt{5})\qquad(\because\ ①)\\&=(2a_n+5b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{5}\end{aligned}$$

$a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n$ は自然数で，$\sqrt{5}$ は無理数であるから，

$$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+5b_n\\ b_{n+1}=a_n+2b_n\end{cases}$$

ゆえに，示された. **（証明終）**

(2) **【証明】**

$a_n-b_n\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^n$ …… ② とおく. ① 式において $n=1$ を代入すると，

$$a_1+b_1\sqrt{5}=2+\sqrt{5}$$

が成り立ち，a_1, b_1 は自然数で，$\sqrt{5}$ は無理数であるから，$a_1=2$,　$b_1=1$ …… ③ が成り立つ.
② が成り立つことを数学的帰納法で示す.

(ｉ) $n=1$ のとき，③ を用いると，

$$(\text{左辺})=a_1-b_1\sqrt{5}=2-\sqrt{5}=(\text{右辺})$$

が成り立つ．よって，$n=1$ のとき，② は成り立つ.

（ii） $n=k$ のとき，$a_k-b_k\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^k$ が成り立つと仮定する．この式の両辺に $(2-\sqrt{5})$ をかけると，

$$(2-\sqrt{5})^{k+1}=(2-\sqrt{5})(a_k-b_k\sqrt{5})=(2a_k+5b_k)-(a_k+2b_k)\sqrt{5}$$
$$=a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{5}\qquad (\because\ (1))$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

ゆえに，（i），（ii）より，すべての自然数 n について ② が成り立つことが示された．

(3) ①＋② より，

$$2a_n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n \qquad \therefore\ a_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{2}$$

①－② より，

$$2\sqrt{5}b_n=(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n \qquad \therefore\ b_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$$

ゆえに，

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{2}}{\dfrac{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5}\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5}\frac{1+\left(\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}\right)^n}=\boldsymbol{\sqrt{5}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4) **【証明】**

(3) より，$\left|\dfrac{a_n}{b_n}-\sqrt{5}\right|<0.001$ であることを示せばよい．

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\sqrt{5}\right|=\left|\sqrt{5}\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}\left|\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}-1\right|$$
$$=\sqrt{5}\left|\frac{2(2-\sqrt{5})^n}{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}\right|=\sqrt{5}\left|\frac{2}{\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^n-1}\right|$$
$$=\sqrt{5}\left|\frac{2}{(-1)^n(9+4\sqrt{5})^n-1}\right|$$

$9+4\sqrt{5}>9+4\cdot 2=17$ であり，n の偶奇で場合分けを行うと，

（i） n が偶数のとき，$n\geqq 4$ であるから，$(9+4\sqrt{5})^n>17^4$

$$(\text{左辺})=\sqrt{5}\left|\frac{2}{(9+4\sqrt{5})^n-1}\right|<\frac{2\sqrt{5}}{17^4-1}<\frac{6}{83520}=0.00007\cdots<0.001$$

（ii） n が奇数のとき，$n\geqq 3$ であるから，$(9+4\sqrt{5})^n>17^3$

$$(\text{左辺})=\sqrt{5}\left|\frac{2}{(9+4\sqrt{5})^n+1}\right|<\frac{2\sqrt{5}}{17^3+1}<\frac{2\cdot 2.3}{4914}=0.0009\cdots<0.001$$

ゆえに，いずれにしても $\left|\dfrac{a_n}{b_n}-\sqrt{5}\right|<0.001$ が成り立つので，示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

(3) では，具体的に a_n, b_n を求めて極限を取りました．そのため，$-1<\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}<0$ の形を作って，その極限が 0 になることを利用しています．(4) では，$\left|\dfrac{a_n}{b_n}-\sqrt{5}\right|$ の値を不等式を使って評価しなければいけないので，より大きい値で置き換えていきます．ただし，n が分子分母にあると評価しづらいので，式変形によって分母だけに n がくるように変形します．経験がないと難しく感じますが，入試では比較的よく出題されるので経験を積みましょう．