

3 ('77 大阪大)

【難易度】…標準

同じ大きさの正四面体を 18 個入れた箱があり，その中の各四面体のそれぞれの面には 1 から 9 までの 9 個の数字のうちのどれか 1 つが書いてある．どの四面体についても，その 4 面の数字は互いに異なっており，また，1 から 9 までのどの 2 つの数字の組に対しても，その両方の数字を同時に含む四面体の個数は一定となっている．

- (1) 数字 1 と 2 を同時に含む四面体の個数はいくつか．
- (2) 箱の中をよくかき混ぜて 1 個の四面体を取り出すとき，それが数字 k を含む確率を P_k とする．すべての $P_k (k = 1, 2, \dots, 9)$ が等しいことを証明せよ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

題意を取るのが難しい問題です．正四面体を立体的にかくのではなく，4 つの面があればよいので，正方形 4 つで考えても同じであることに気づけば，図もかきやすく思考の手助けになるでしょう．

解答

- (1) 1 から 9 の 9 つの数の中から異なる 2 つの数を取り出す方法は，

$${}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \text{ (通り)}$$

ある 4 つの面に 2 組の数をかく方法は， ${}_4C_2 = 6$ (通り) あるので，数字 1 と 2 を同時に含む四面体の個数を n とすると，

$$18 \times 6 = 36n \quad \text{よって, } n = 3$$

となるので，求める個数は 3 (個)……(答)

- (2) 【証明】

数字 k を含む確率を考える． k と組になる数は，1 から 9 のうち k を除く 8 通りがあり，その組は (1) よりそれぞれ 3 個ずつ存在しているので，数 k を含む組の総数は，

$$8 \times 3 = 24 \text{ (個)}$$

である．ここで，数 k が書かれている四面体の 4 つの数が

$$(k, a, b, c)$$

であるとすると， k を含む組は (k, a) , (k, b) , (k, c) の 3 組ができるので， k が書かれている四面体の個数を m とすると，

$$3m = 24 \quad \text{よって, } m = 8$$

を得る．したがって， $P_k = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ となり，すべての $k (k = 1, 2, \dots, 9)$ について同様のことが言えるので，題意は示された． (証明終)

【解説】

題意を理解するのが少々難しい問題ですが、問題文の意味が理解できれば計算は大したことありません。要約すると次のようになります。

18 個の四面体 1 つ 1 つにおいて、そこに書かれている 4 つの数から出来上がる 6 つの組は全部で 108 個あることがわかります。一方、1 から 9 までの数を 2 つずつ組合せてできる $(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (8, 9)$ の 36 組が同じ数だけ存在していると言っているのですから、これら 1 つ 1 つの組は、

$$108 \div 36 = 3 \text{ (組)}$$

あることが求められるというわけです。