13 （'92　広島大） 【難易度】 … 標準

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt$ を求めよ．

(2)　xy 平面上の曲線

$$x=e^{-t}\cos t,\quad y=e^{-t}\sin t\quad (0\leqq t\leqq\pi)$$

と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

【テーマ】：面積

方針

(1) は部分積分法で，同形出現のタイプです．(2) は媒介変数表示された曲線の面積計算です．置換積分法を用いて計算しましょう．

♣　♠

解答

(1)　$I=\displaystyle\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt$ とおくと，

$$\begin{aligned}I&=\Big[-e^{-t}(\cos t-\sin t)\Big]_0^k+\int_0^k e^{-t}(-\sin t-\cos t)\,dt\\&=-e^{-k}(\cos k-\sin k)+1-\int_0^k e^{-t}(\sin t+\cos t)\,dt\\&=-e^{-k}(\cos k-\sin k)+1-\left\{\Big[-e^{-t}(\sin t+\cos t)\Big]_0^k+\int_0^k e^{-t}(\cos t-\sin t)\,dt\right\}\end{aligned}$$

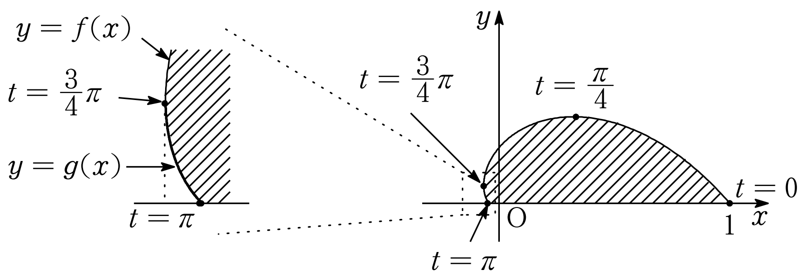
$$\begin{aligned}\therefore\quad 2I&=-e^{-k}(\cos k-\sin k)+1+e^{-k}(\sin k+\cos k)-1\\&=2e^{-k}\sin k\end{aligned}$$

ゆえに，$I=\boldsymbol{e^{-k}\sin k}$……**(答)**

(2)　$\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$，　$\dfrac{dy}{dt}=e^{-t}(\cos t-\sin t)$ であるから，$\dfrac{dx}{dt}=0$，$\dfrac{dy}{dt}=0$ となるのは，それぞれ $t=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{\pi}{4}$ である．ゆえに，増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$-$		$-$	0	$+$	
x	1	$\leftarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\leftarrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	$\rightarrow$	$-e^{-\pi}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\uparrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\downarrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	$\downarrow$	0

これより，与えられた曲線を図示すると右図のようになる．



ここで，

$0 \leqq t \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ の曲線を $y = f(x)$,

$\dfrac{3}{4}\pi \leqq t \leqq \pi$ の曲線を $y = g(x)$

とする．求める面積を S とすると，

$$S = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}}^{1} f(x)\,dx - \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3}{4}\pi}}^{-e^{-\pi}} g(x)\,dx$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} e^{-t}\sin t(-e^{-t}(\cos t + \sin t))\,dt - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-t}\sin t(-e^{-t}(\cos t + \sin t))\,dt$$

$$= \int_{0}^{\frac{3}{4}\pi} e^{-2t}\sin t(\cos t + \sin t)\,dt + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} e^{-2t}\sin t(\cos t + \sin t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} e^{-2t}\sin t(\cos t + \sin t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\sin t\cos t + \sin^2 t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} e^{-2t}(\sin 2t - \cos 2t + 1)\,dt$$

ここで，$2t = x$ とおくと，$dt = \dfrac{1}{2}dx$ であるから，

t	$0 \to \pi$
x	$0 \to 2\pi$

$$S = \frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} \{e^{-x}(\sin x - \cos x) + e^{-x}\}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{-2\pi}\sin 2\pi + \Big[-e^{-x}\Big]_{0}^{2\pi}\right) \quad (\because\ (1))$$

$$= \frac{1}{4}(-e^{-2\pi} + 1) = \boldsymbol{\frac{e^{2\pi} - 1}{4e^{2\pi}}} \cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

部分積分法を行う際，e^x と $\sin x, \cos x$ の積であれば同形出現タイプになるので，定積分の値を I と置いて計算します．

(2) のような媒介変数表示された関数で面積を求めるときは，下記の公式を使えば答えはすぐ求められますが，公式の成り立ちなどを理解しているうえで使わなければ思わぬ落とし穴に落ちることがあります．解答では，きちんとグラフの上下を考えて立式をしましたが，結局公式と同じ形になる点に注目しましょう．また，この公式は，本問の解答と同じ手順で示すことができるので，一度は導いて理解しておきましょう．

【媒介変数表示された曲線で囲まれる部分の面積】

$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $(a \leqq t \leqq d)$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S は，

$$S = \int_a^d g(t)f'(t)\,dt$$

である．