

38 ('96 京都大)

【難易度】… 標準

正の実数 a に対し、実数全体で定義される関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \int_{-2}^2 |x-t|(t^2 - a^2) dt$$

で定める。このとき、 $g(x)$ が最小値を持つような a の範囲を求めよ。また a がそのような範囲にあるとき、 $g(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

【テーマ】: 定積分と最大最小

方針

定積分の計算を行うために、絶対値をはずすことから始めましょう。

解答

(i) $x < -2$ のとき、

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-2}^2 (t-x)(t^2 - a^2) dt \\ &= \int_{-2}^2 (t^3 - xt^2 - a^2t + a^2x) dt \\ &= 2 \int_0^2 (-xt^2 + a^2x) dt \\ &= 2 \left[-\frac{x}{3}t^3 + a^2xt \right]_0^2 \\ &= \left(4a^2 - \frac{16}{3}\right)x \end{aligned}$$

(ii) $-2 \leq x \leq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-2}^x (x-t)(t^2 - a^2) dt - \int_x^2 (x-t)(t^2 - a^2) dt \\ &= \int_{-2}^x (-t^3 + xt^2 + a^2t - a^2x) dt - \int_x^2 (-t^3 + xt^2 + a^2t - a^2x) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{x}{3}t^3 + \frac{a^2}{2}t^2 - a^2xt \right]_{-2}^x - \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{x}{3}t^3 + \frac{a^2}{2}t^2 - a^2xt \right]_x^2 \\ &= \frac{1}{6}x^4 - a^2x^2 - 4a^2 + 8 \end{aligned}$$

(iii) $x > 2$ のとき、

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-2}^2 (x-t)(t^2 - a^2) dt \\ &= -\left(4a^2 - \frac{16}{3}\right)x \quad (\because (i)) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$g(x) = \begin{cases} \left(4a^2 - \frac{16}{3}\right)x & (x < -2) \\ \frac{1}{6}x^4 - a^2x^2 - 4a^2 + 8 & (-2 \leq x \leq 2) \\ -\left(4a^2 - \frac{16}{3}\right)x & (x > 2) \end{cases}$$

ここで、 $4a^2 - \frac{16}{3} > 0$ ならば、 $x < -2$ で $g(x)$ は単調増加し、 $x > 2$ で $g(x)$ は単調減少するため、 $g(x)$ は最小値を持たないので、 $g(x)$ が最小値を持つためには、 $4a^2 - \frac{16}{3} \leq 0$ であることが必要。このとき、

$$4a^2 - \frac{16}{3} \leq 0 \iff a^2 \leq \frac{4}{3}$$

$$\therefore -\frac{2}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$a > 0$ であるから,

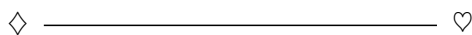
$$0 < a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

逆にこのとき, 最小値をとるとすれば, $-2 \leq x \leq 2$ であるので, この区間において,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{6}x^4 - a^2x^2 - 4a^2 + 8 \\ &= \frac{1}{6}(x^2 - 3a^2)^2 - \frac{3}{2}a^4 - 4a^2 + 8 \end{aligned}$$

より, $x = \pm\sqrt{3}a$ のとき, 最小値 $-\frac{3}{2}a^4 - 4a^2 + 8$ をとる. 以上より, $g(x)$ が最小値をとるための a の範囲とそのときの最小値は,

$$0 < a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ 最小値 : } -\frac{3}{2}a^4 - 4a^2 + 8 \dots\dots (\text{答})$$



解説

絶対値をはずす方法として, 次のようなグラフを考える方法があります. まず, 積分変数を横軸にとって, 絶対値の中身の関数のグラフをかきます. 本問の場合, 積分変数は t で絶対値の中は $x - t$ なので, x を定数とみなして, $y = x - t$ のグラフをかきます.

次に, t 軸との交点を書き込み, 積分区間を書き入れます. その際, 問題文に x の範囲が書かれていればそれにしますが, もちろん場合分けが必要になることもあります. 本問は, x の範囲が書かれていないので, 場合分けが必要になります. x と $-2, 2$ の位置関係で 3 通りに分ける必要があるというわけです.

