

**4** ('69 北海道大)

【難易度】…標準

数列  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  において

$$a_1 = 3, \quad a_2 = \frac{5}{3}, \quad a_n = \frac{1}{3}(4a_{n-1} - a_{n-2}) \quad (n \geq 3)$$

という関係がある.

(1)  $a_n$  を  $n$  の式で表せ.(2)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\log(a_k - 1)\log(a_{k+1} - 1)}$  とおくととき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ. ただし, 対数は常用対数とする.

【テーマ】: 隣接3項間漸化式と無限級数

**方針**

(1) では, 特性方程式の解を利用して, 与えられた漸化式を式変形します.(2) では, 部分分数分解を行います.

**解答**(1) 漸化式  $3a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$  の特性方程式は,

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (3x - 1)(x - 1) = 0$$

であるから, 解は  $x = \frac{1}{3}, 1$  である. よって, 与えられた漸化式は, 次のように変形できる.

$$a_n - \frac{1}{3}a_{n-1} = a_{n-1} - \frac{1}{3}a_{n-2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{3}(a_{n-1} - a_{n-2}) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

\textcircled{1} より,

$$a_n - \frac{1}{3}a_{n-1} = a_2 - \frac{1}{3}a_1 = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

\textcircled{2} より,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} (a_2 - a_1) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{5}{3} - 3\right) \\ &= -4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

\textcircled{3} \times 3 - \textcircled{4} より,

$$\begin{aligned} 2a_n &= 2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \therefore a_n &= 1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

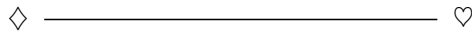
(2) (1) より,  $S_n$  を変形すると,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{\log 3}\right) \left\{ \frac{1}{\log 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} - \frac{1}{\log 2 \left(\frac{1}{3}\right)^k} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\log 3} \left\{ \left( \frac{1}{\log 2 \left(\frac{1}{3}\right)^0} - \frac{1}{\log 2 \left(\frac{1}{3}\right)^1} \right) + \left( \frac{1}{\log 2 \left(\frac{1}{3}\right)^1} - \frac{1}{\log 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. \cdots + \left( \frac{1}{\log 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} - \frac{1}{\log 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n} \right) \right\} \\
&= -\frac{1}{\log 3} \left( \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n} \right) \\
&= -\frac{1}{\log 3} \cdot \frac{-n \log 3}{\log 2 (\log 2 - n \log 3)} \\
&= \frac{n}{(\log 2)^2 - n \log 2 \log 3}
\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(\log 2)^2}{n} - \log 2 \log 3} \\
&= -\frac{1}{\log 2 \log 3} \cdots \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$



**解説**

隣接 3 項間漸化式の解法をまとめておきます。誘導なしで解けるようにしておきましょう。

(2) では、(1) の結果を代入することで部分分数分解ができるようになります。対数が絡んでいますが、考え方は通常の部分分数分解と同じです。

**【隣接 3 項間漸化式】**

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n + r = 0$$

**【解法と解説】**

$r = 0$  のときは、 $x^2 + px + q = 0$  (特性方程式という) を解いてその解  $x = \alpha, \beta$  を求めると、

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases}$$

の 2 式が得られる。これは、等比数列型の漸化式であるから、両方を計算し、

$$a_{n+1} - \alpha a_n, \quad a_{n+1} - \beta a_n$$

を求めれば、2 式を引くことから  $a_n$  が得られる。 $\alpha = \beta$  のときは、これらは同じ式になるので、通常隣接 2 項間漸化式として解くことができる。

$r \neq 0$  のときは、一度階差をとることで定数  $r$  を消去すれば上の方法が使える。なお、各係数の和が 0 となるとき、特性方程式の解  $x = \alpha, \beta$  のうち 1 つは必ず 1 になるので、

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = a_{n+1} - \alpha a_n = \cdots = a_2 - \alpha a_1$$

とすることができ、すぐに隣接 2 項間漸化式に帰着される。

☞注： $a_{n+2}$  の係数が 1 以外の時も同様にして解くことができる。