

17

('99 大阪大)

【難易度】… 難

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。 $a_m = [\sqrt{m}]$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) に対して、数列 b_1, b_2, b_3, \dots を $b_1 = 0, k \geq 2$ のとき $a_m < k \leq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k = m$ と定める。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) すべての自然数 n に対して $\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^n b_k = n^3$ が成り立つことを示せ。

(3) $\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}]$ を求めよ。