19 （'11　広島大） 【難易度】 … 標準

平面上で，線分 AB を 1 : 2 に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする．点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする．

円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$, $\angle \mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2) 点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ．

(3) PQ の長さを $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, θ で表せ．

(4) PA = 3, PB = 2 とする．△QAB = 3△POB を満たすとき，△PAB の面積を求めよ．

【テーマ】：ベクトルと図形

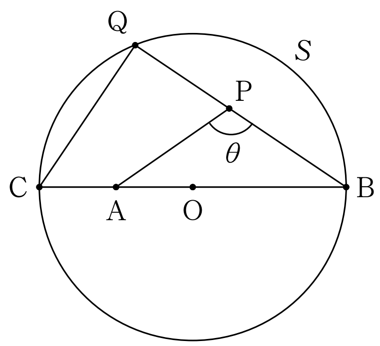
方針

(2) では，$\cos\theta$ のとり得る値を求めるので，内積を用います．(3) では，QC ⊥ QB を用います．

♣ ♠

解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}}$……**(答)**



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PC}}&=\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PO}}\right)\\&=2\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PO}}\\&=2\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PO}}\\&=\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}\\&=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

(2) **【証明】**

点 P は円の内部にあることから，∠CPB は鈍角である．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\vec{b}<0$ となる．

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\vec{b}<0 \iff \frac{1}{3}\left(4\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}<0$$

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2<0$$

$$\therefore\ 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta-|\vec{b}|^2<0$$

$|\vec{b}|>0$ であるから，

$$\cos\theta<\frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$$

が成り立ち，示された． **(証明終)**

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\vec{b}\ (k<0)$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{4}{3}\vec{a}-\left(k+\frac{1}{3}\right)\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{QC}}\cdot\vec{b}=0$ より,

$$\left\{\frac{4}{3}\vec{a}-\left(k+\frac{1}{3}\right)\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}=0$$

$$\frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\left(k+\frac{1}{3}\right)\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$\left|\vec{b}\right|\neq 0$ であるから,

$$k+\frac{1}{3}=\frac{4\left|\vec{a}\right|\cos\theta}{3\left|\vec{b}\right|}\quad\Longleftrightarrow\quad k=\frac{4\left|\vec{a}\right|\cos\theta-\left|\vec{b}\right|}{3\left|\vec{b}\right|}$$

(2) より, $\left|\vec{b}\right|-4\left|\vec{a}\right|\cos\theta>0$ であるから,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=|k|\left|\vec{b}\right|=\frac{\left|\vec{b}\right|-4\left|\vec{a}\right|\cos\theta}{3}$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}=\boldsymbol{\frac{\left|\vec{b}\right|-4\left|\vec{a}\right|\cos\theta}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(4)　題意より, $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=2$ である.

$$\triangle\mathrm{QAB}=(1+|k|)\triangle\mathrm{PAB}=(1-k)\cdot\frac{3}{2}\triangle\mathrm{POB}$$

$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき,

$$\frac{3}{2}(1-k)=3\quad\Longleftrightarrow\quad k=-1$$

このとき,

$$\frac{4\left|\vec{a}\right|\cos\theta-\left|\vec{b}\right|}{3\left|\vec{b}\right|}=-1\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{4\vec{a}\cdot\vec{b}-\left|\vec{b}\right|^2}{3\left|\vec{b}\right|^2}=-1$$

$$\therefore\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-2$$

よって,

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 4-4}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(2) では，なす角が鈍角であれば内積は負の値をとることがポイントになります．また，(3) では，点 Q が円周上にあることと，線分 BC が円の直径になることから，QC ⊥ QB となることを見抜き，内積を利用します．いずれにしても内積の計算をうまく利用することがポイントになる問題です．