21 （'11　大阪大） **【難易度】** … 標準

座標平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある．点 A$(-2,0)$ を通る直線が $y>0$ の範囲にある点 P において円 C と接するとする．自然数 $n \geqq 2$ に対して点 A を通る $(n-1)$ 本の直線で $\angle$OAP を n 等分する．これらの直線を直線 AO となす角が小さいものから順に $l_1, \cdots, l_{n-1}$ とし，直線 l_k と円 C の 2 つの交点のうち点 A に近い方を Q_k，他方を R_k とする．

(1) $\mathrm{AR}_k{}^2 - \mathrm{AQ}_k{}^2$ を n と k を用いて表せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2\right)$ を求めよ．

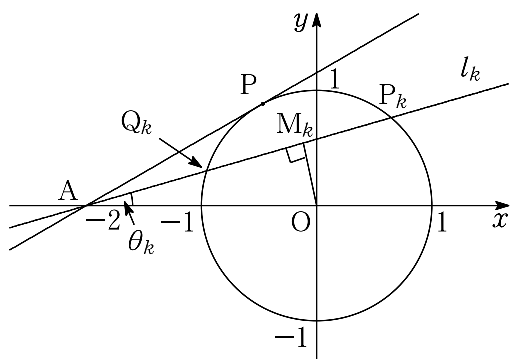
【テーマ】：区分求積法

方針

接線を求めて，n 等分した角の 1 つの角度を求めます．三角比をうまく利用しましょう．

♣ ♠

解答



(1) 点 A を通る直線の方程式は，傾きを m として

$$y=m(x+2) \iff mx-y+2m=0$$

とおける．これが円 $x^2+y^2=1$ と接するとき，

$$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

$$4m^2=m^2+1$$

$$\therefore\quad m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる．題意より $y>0$ で接するので，$m>0$ であるから，$m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る．よって，

$$\tan\angle\mathrm{OAP}=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より，} \angle\mathrm{OAP}=\frac{\pi}{6}$$

である．ここで，l_k と x 軸のなす角を θ_k とすると，$\theta_k=\dfrac{k\pi}{6n}$ である．$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の中点を M_k とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2&=(\mathrm{AR}_k+\mathrm{AQ}_k)(\mathrm{AR}_k-\mathrm{AQ}_k)\\&=2\mathrm{AM}_k\cdot 2\mathrm{QM}_k\end{aligned}$$

ここで，

$$\mathrm{AM}_k=\mathrm{OA}\cos\theta_k=2\cos\theta_k$$

$$\mathrm{QM}_k=\sqrt{1-\mathrm{OM}_k{}^2}=\sqrt{1-4\sin^2\theta_k}$$

より，

$$\begin{aligned}\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2&=8\cos\theta_k\sqrt{1-4\sin^2\theta_k}\\&=\boldsymbol{8\cos\frac{k\pi}{6n}\sqrt{1-4\sin^2\frac{k\pi}{6n}}}\end{aligned}$$ ……（答）

(2) (1) において，$k=n$ のとき，$\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2=0$ となるので，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{AR}_k{}^2-\mathrm{AQ}_k{}^2\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(8\cos\frac{k\pi}{6n}\sqrt{1-4\sin^2\frac{k\pi}{6n}}\right)\\
&= \int_0^1\left(8\cos\frac{\pi}{6}x\sqrt{1-4\sin^2\frac{\pi}{6}x}\right)dx
\end{aligned}
$$

ここで，$\sin\frac{\pi}{6}x=t$ とおくと，$\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}x\,dx=dt$ であり，

x, t の対応は，右表のようになるので，楕円の面積を利用して，

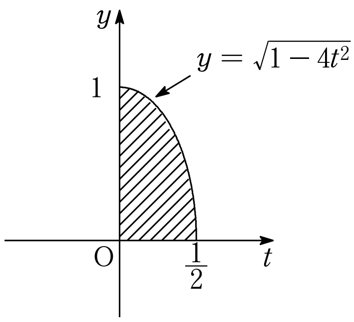
x	$0 \to 1$
t	$0 \to \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(8\cdot\frac{6}{\pi}\sqrt{1-4t^2}\right)dt\\
&= \frac{48}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4t^2}\,dt\\
&= \frac{48}{\pi}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1\cdot\frac{1}{2}\\
&= \mathbf{6}\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

◇ ♡

(1) では，まずどの角を n 等分しているかを求めるため，$\angle\mathrm{OAP}$ を求めます．角度が分かれば直線 l_k と x 軸とのなす角が分かるはずなので，これをもとにして P_k, Q_k を求めますが，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の中点を M_k とすれば直角三角形が作れるので，これをヒントに三角比を用いて長さを出すとよいでしょう．

(2) では，区分求積法を用いて極限値を計算します．一度，置換積分をして t に関する積分にしていますが，最後の部分の計算は，楕円の面積を利用すると積分計算があっさり終わります．$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-4t^2}\,dt$ は，右図の斜線部分の面積を表しているので，楕円の内部の面積の $\frac{1}{4}$ がこの定積分の値になります．



公式 楕円の面積

楕円 ： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ で囲まれる部分の面積は，$\boldsymbol{\pi ab}$ である．