22 （’11　岐阜大） 【難易度】… 標準

1 辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，辺 OC の中点を M，辺 AB の中点を N とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\theta=\angle\mathrm{AMN}$ とする．$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　$0<s<1$ とする．線分 MN を $s:(1-s)$ に内分する点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, s を用いて表せ．

(3)　三角形 ABM の外心を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(4)　2 直線 OA と OB に平行で点 C を通る平面を α とする．点 A, B, M を通り，平面 α 上に中心をもつ球面を S とする．S の中心を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

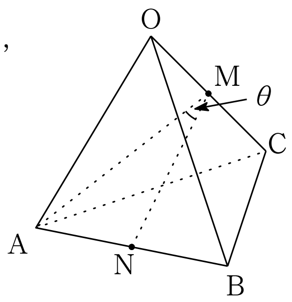
【テーマ】：空間ベクトル

方針

(1) は，三角比の定義に戻って考えます．(2) は (3) の，(3) は (4) のヒントになる設問なので，問題の繋がりを捉えながら考えます．

♣ ♠

解答



(1)　$\angle\mathrm{OMA}=90^\circ$, $\angle\mathrm{OAM}=30^\circ$ より，$\mathrm{AM}=1\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，

$\angle\mathrm{MNA}=90^\circ$ より，

$$\mathrm{MN}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{AN}^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である．したがって，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AM}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$……(**答**)

(2)　題意より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=s\overrightarrow{\mathrm{ON}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+(1-s)\cdot\frac{1}{2}\vec{c}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}s\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{1}{2}(1-s)\vec{c}}\text{……(答)}\end{aligned}$$

(3)　△AMB は二等辺三角形で MN は AB の垂直二等分線なので，外心 Q は線分 MN 上にある．Q から MB に下ろした垂線の足を L とすると，L は線分 MB の中点であるから，

$$\mathrm{ML}=\frac{1}{2}\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{AM}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

である．$\angle\mathrm{QML}=\theta$ より，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MQ}}\iff\mathrm{MQ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

これより，$\mathrm{MQ}:\mathrm{QN}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}:\dfrac{\sqrt{2}}{8}=3:1$ となるので，(2) で $s=\dfrac{3}{4}$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{1}{8}\vec{c}}\text{……(答)}$$

(4) 3 点 A, B, M は点 R から等距離にあるので，点 R から平面 ABM に下ろした垂線の足は，△ABM の外心 Q と一致する．すなわち，

$$\mathrm{QR} \perp （平面\ \mathrm{ABM}）\cdots\cdots ①$$

である．一方，

$$\mathrm{AM} \perp \mathrm{OC}\ かつ\ \mathrm{BM} \perp \mathrm{OC}$$

であるから，△ABM は線分 OC と垂直である．したがって，QR // OC であるから，実数 t を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表すことができる．(3) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QR}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ &= \frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} + \left(\frac{1}{8} + t\right)\vec{c}\end{aligned}$$

を得る．一方，点 R は △OAB に平行で点 C を通ることから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{c}$$

と表すこともできる．$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であるから，$u = v = \dfrac{3}{8}$, $t = \dfrac{7}{8}$ を得る．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boldsymbol{\frac{3}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} + \vec{c}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

正四面体の各面は正三角形です．したがって，中点を取ることで直角三角形ができますから，これより三角比の定義が使えることがわかります．(2) 以降は，前の設問の結果をうまく用いることで解決できます．特に (4) では，平面が線分に垂直であるという条件から QR // OC という条件を見つけてくることが重要なポイントです．ある程度丁寧な図をかくことも大切ですが，平面と線分が垂直になるための条件など，基本的な知識が必要になる問題です．