24 ('06 千葉大) 【難易度】… 標準

1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある．この中からカードを 3 枚同時に取り出す．取り出された 3 枚のカードに書かれた 3 つの整数のうち，最大のものを除いた残りの 2 つの整数の和を X とする．

(1) $X=3$ である確率を求めよ．

(2) X の期待値を求めよ．

【テーマ】：期待値の和

方針

3 つの整数の和を Y，最大の整数を N として，$E(X)=E(Y-N)=E(Y)-E(N)$ を利用します．

♣ ♠

解答

(1) $X=3$ となるのは，取り出された 3 枚のカードに 1 と 2 が含まれているときであるから，求める確率は，

$$\frac{1\times {}_8\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\boldsymbol{\frac{1}{15}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) 3 枚のカードにかかれた 3 つの整数の和を Y とし，最大の整数を N とすると，$X=Y-N$ である．

$N=k\ (k=3,\ 4,\ \cdots,\ 10)$ となる確率は，残り 2 枚を $1\sim k-1$ のうちから選べばよいので，

$$\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{(k-1)(k-2)}{240}$$

である．よって，N の期待値 $E(N)$ は，

$$\begin{aligned}E(N)&=\sum_{k=3}^{10}k\cdot\frac{(k-1)(k-2)}{240}\\&=\frac{1}{240}\sum_{k=3}^{10}\frac{k+1-(k-3)}{4}k(k-1)(k-2)\\&=\frac{1}{960}\sum_{k=3}^{10}\{(k+1)k(k-1)(k-2)-k(k-1)(k-2)(k-3)\}\\&=\frac{1}{960}(11\cdot10\cdot9\cdot8)\\&=\frac{33}{4}\end{aligned}$$

また，Y の期待値 $E(Y)$ を求めると，全事象は ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通りで，$1\sim10$ の数字はそれぞれ他の 2 数の選び方の ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りあるので，

$$E(Y)=\frac{(1+2+\cdots+10)\cdot{}_9\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{33}{2}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}E(X)&=E(Y-N)\\&=E(Y)-E(N)\\&=\frac{33}{2}-\frac{33}{4}\\&=\boldsymbol{\frac{33}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

―――――――――― ♢ ―――――――――― ♡ ――――――――――

解説

(2) では，(和の期待値) = (期待値の和) ですから，一般に $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ が成り立ちます．また，3 数の和を Y とするとき，$E(Y)$ は和の期待値であり，期待値は平均値ですから 3 数の和の平均を出せばよいのです．3 数のすべての組合せを考えると，各数字に関して残り 2 数の組合せは ${}_9\mathrm{C}_2$ 通りあるので，その総和は $(1+2+\cdots+10)\cdot{}_9\mathrm{C}_2$ になります．これを全事象で割れば期待値（平均値）が得られます．また，次のように考えることでも $E(X)$ を求めることができます．

別解

取り出された 3 数を $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$ とするとき，$b=k\ (2\leqq k\leqq 9)$ として固定する．このとき，c は $k+1\leqq c\leqq 10$ の $10-k$ 通りから選べばよいので，

$$X=1+k,\ 2+k,\ \cdots,\ (k-1)+k$$

となるものがそれぞれ $10-k$ 通り存在する．したがって，$b=k$ となるときの X の総和は

$$\begin{aligned}[(1+k)+(2+k)+\cdots+\{(k-1)+k\}]\times(10-k)&=\left\{\frac{1}{2}(k-1)k+k(k-1)\right\}(10-k)\\&=\frac{3}{2}(k-1)k(10-k)\end{aligned}$$

となる．ゆえに，求める期待値 $E(X)$ は，

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\sum_{k=2}^{9}\frac{3}{2}(k-1)k(10-k)\\&=\frac{1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}\cdot\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{9}(-k^3+11k^2-10k)\\&=\frac{1}{120}\cdot\frac{3}{2}\left\{-\left(\frac{1}{2}\cdot9\cdot10\right)^2+11\cdot\frac{1}{6}\cdot9\cdot10\cdot19-10\cdot\frac{1}{2}\cdot9\cdot10\right\}\\&=\frac{1}{120}\cdot\frac{3}{2}\cdot90\cdot\left(-\frac{90}{4}+\frac{11\cdot19}{6}-5\right)\\&=\frac{1}{120}\cdot\frac{3}{2}\cdot90\cdot\frac{22}{3}\\&=\boldsymbol{\frac{33}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

である．

ちなみに (2) の和の計算では，4 数の積の差を作って和の計算を行っています．次のように計算できます．

$$\begin{aligned}&\sum_{k=3}^{10}\{(k+1)k(k-1)(k-2)-k(k-1)(k-2)(k-3)\}\\&=\{(4\cdot3\cdot2\cdot1)-(3\cdot2\cdot1\cdot0)\}+\{(5\cdot4\cdot3\cdot2)-(4\cdot3\cdot2\cdot1)\}+\{(6\cdot5\cdot4\cdot3)-(5\cdot4\cdot3\cdot2)\}+\cdots\\&\quad\cdots+\{(10\cdot9\cdot8\cdot7)-(9\cdot8\cdot7\cdot6)\}+\{(11\cdot10\cdot9\cdot8)-(10\cdot9\cdot8\cdot7)\}\\&=11\cdot10\cdot9\cdot8\end{aligned}$$

部分分数分解と同じ考え方で，同じ形を作って書き出すことで最初と最後しか残らなくなります．最初の部分は 0 ですから，事実上最後の項しか残らないのです．別解でも 4 数の積の差を作ることで同様の計算ができます．