

31 ( '04 富山大 )

【難易度】…標準

大小 2 個のさいころを同時に 5 回投げ, その  $n$  回目 ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ) に出た目の数をそれぞれ  $a_n, b_n$  とする.  $X_1 = a_1b_1, X_2 = X_1 + a_2b_2, \dots, X_5 = X_4 + a_5b_5$  と順に定める.  $X_n$  が偶数となる確率を  $p_n$  とするとき,  $p_2, p_3, p_4, p_5$  を求めよ.

【テーマ】: 独立・反復試行の確率

方針

$a_nb_n$  が偶数になる確率と奇数になる確率を求めて考えます. また, 漸化式を立式する方法もあります.

解答

$a_nb_n$  が奇数になるのは,  $a_n$  と  $b_n$  がともに奇数のときであるから, その確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

である. よって,  $a_nb_n$  が偶数になる確率は, 余事象の確率より,

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

である. したがって,  $p_1 = \frac{3}{4}$  となる.

$X_2$  が偶数となるのは,

(i)  $X_1$  が偶数かつ  $a_2b_2$  が偶数(ii)  $X_1$  が奇数かつ  $a_2b_2$  が奇数

の 2 通りが考えられるので,

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{3}{4} + (1 - p_1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{8} \dots\dots(\text{答})$$

同様にすると,

$$p_3 = p_2 \cdot \frac{3}{4} + (1 - p_2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{32} + \frac{3}{32} = \frac{9}{16} \dots\dots(\text{答})$$

$$p_4 = p_3 \cdot \frac{3}{4} + (1 - p_3) \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64} + \frac{7}{64} = \frac{17}{32} \dots\dots(\text{答})$$

$$p_5 = p_4 \cdot \frac{3}{4} + (1 - p_4) \cdot \frac{1}{4} = \frac{51}{128} + \frac{15}{128} = \frac{33}{64} \dots\dots(\text{答})$$

別解

次のように, 漸化式を立式して解くこともできます.

$$p_1 = \frac{3}{4}, \quad p_{n+1} = p_n \cdot \frac{3}{4} + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{4}$$

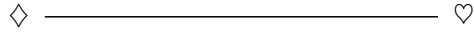
が成り立つので,

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4} \iff p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

と変形できる. よって, 数列  $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$  は, 初項  $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , 公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列であるから,

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \iff p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}$$

を得る. これを用いて  $p_2, p_3, p_4, p_5$  を求めることができる.

**解説**

問題の仕組みは単純なので、完答を目指したい問題です。先に述べた解答で答えた人は、漸化式が立式できることに気付いたでしょうか？単純に同じ作業を繰り返すので、漸化式が存在に気付きたいところです。常に問題が一般化することを想定して解くように心がけましょう。