33 （'10　大阪大） **【難易度】** … やや難

p は素数，r は正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $x_1, x_2, \cdots, x_r$ についての式 $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ を展開したときの単項式 ${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots{x_r}^{p_r}$ の係数を求めよ．ここで，$p_1, p_2, \cdots, p_r$ は 0 または正の整数で $p_1+p_2+\cdots+p_r=p$ を満たすとする．

(2) $x_1, x_2, \cdots, x_r$ が正の整数のとき，$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p-({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots+{x_r}^p)$ は p で割り切れることを示せ．

(3) r は p で割り切れないとする．このとき，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れることを示せ．

【テーマ】：整数問題

方針

$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ は $(x_1+x_2+\cdots+x_r)$ を p 個掛け合わせたものなので，順列を考えます．

♣ ♠

解答

(1) $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ は $(x_1+x_2+\cdots+x_r)$ を p 個掛け合わせたものであるから，その p 個一つ一つから $x_1, x_2, \cdots, x_r$ のうち 1 つを選びその積を作ると $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p$ を展開したときの単項式を得る．
${x_1}^{p_1}{x_2}^{p_2}\cdots{x_r}^{p_r}$ は，x_1 を p_1 個取り出し，x_2 を p_2 個取り出し，… x_r を p^r 個取り出したときの積である．
よって，これら p 個の文字を一列に並べる順列の総数が求める係数となるので，

$$\boldsymbol{\frac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) **【証明】**

$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p-({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots+{x_r}^p)$ を展開したときの単項式は，(1) で考えた単項式から ${x_1}^p, {x_2}^p, \cdots, {x_r}^p$ を除いたものである．また，

$$p_k<p\quad(k=1, 2, \cdots, r)\cdots\cdots ①$$

である．単項式の係数

$$\frac{p!}{p_1!p_2!\cdots p_r!}$$

は整数であり，p は素数であるから，① から $p_k!\ (k=1, 2, \cdots, r)$ は p と互いに素である．よって，この係数は p の倍数となり，与式は p で割り切れることが示された． **(証明終)**

(3) **【証明】**

$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^p-({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots+{x_r}^p)$ において，$x_k=1\ (k=1, 2, \cdots, r)$ とすると，r^p-r となり，この式は (2) より p で割り切れる．

$$r^p-r=r(r^{p-1}-1)$$

であり，r は p で割り切れないので，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れる．ゆえに，示された． **(証明終)**

♢ ♡

解説

(1) は，多項定理を利用した展開の問題です．本質的には教科書レベルの問題なのですが，文字が多いのでそれに

惑わされて本質を見失うかもしれません．多項定理の仕組みが理解しているかどうかを問う問題です．

(2) は，素数に関する知識が必要です．p が素数であることは，$1,\ 2,\ \cdots,\ p-1$ のすべての自然数で p が割り切れないことと同値です．したがって，$p_k < p$ という式から，$p_k!$ と p が互いに素であることが分かります．

(3) は，(2) を利用するのですが，$x_k = 1$ とおいて $r^p - r$ を作り出すことが必要になります．