

1 ('12 広島大)

【難易度】…標準

 a を実数とし, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ とおく. 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 次の問いに答えよ.

- (1) すべての自然数 n について $x_n = a$ となるとき, a を求めよ.
- (2) $a < 1$ のとき, $x_n < 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ.
- (3) $0 < a < 1$ のとき, $x_n < x_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ.