**1** （′12　広島大） **【難易度】** … 標準

$a$ を実数とし，$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ とおく．数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1)　すべての自然数 $n$ について $x_n = a$ となるとき，$a$ を求めよ．

(2)　$a < 1$ のとき，$x_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

(3)　$0 < a < 1$ のとき，$x_n < x_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを証明せよ．

**【テーマ】：数学的帰納法**

**方針**

(1) は，漸化式に従って計算するだけです．(2), (3) は数学的帰納法を用いて証明します．

♣ ♠

**解答**

(1)　与えられた漸化式より，$x_{n+1} = {x_n}^3 - 3{x_n}^2 + 3x_n$ であり，すべての自然数 $n$ に対して，$x_n = a$ となるとき，

$$a = a^3 - 3a^2 + 3a \iff a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$
$$\iff a(a-1)(a-2) = 0$$

$\therefore$　$\boldsymbol{a = 0,\ 1,\ 2}$……**(答)**

(2)　**【証明】**

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geqq 0$ であるから，$f(x)$ は単調増加である．…… $(*)$

(i)　$n = 1$ のとき，

$x_1 = a$ であるから，$a < 1$ のとき，$x_1 < 1$ となり，成り立つ．

(ii)　$n = k$ のとき，

$x_k < 1$ が成り立つと仮定すると，$(*)$ より，

$$x_{k+1} = f(x_k) < f(1) = 1$$

であるから，$n = k + 1$ のときも成り立つ．

ゆえに，(i), (ii) より，すべての自然数 $n$ に対して $x_n < 1$ が成り立つことが示された．　**【証明終】**

(3)　**【証明】**

(2) より，$f(x)$ は単調増加であるから，$x > 0$ であるならば，

$$f(x) > f(0) = 0$$

が成り立つ．…… $(**)$

$0 < a < 1$ のとき，$x_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を示す．

(i) $n=1$ のとき,

$x_1=a>0$ であるから，成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき,

$x_k>0$ が成り立つと仮定すると，(**) より,

$$x_{k+1}=f(x_k)>0$$

となり，$n=k+1$ のときも成り立つ.

ゆえに，(i), (ii) より，すべての自然数 $n$ に対して $x_n>0$ が成り立つことが示された.

よって，(2) とあわせると，$0<x_n<1$ が成り立つことが示された.

ここで，$0<x<1$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x)-x &= x^3-3x^2+3x-x \\ &= x(x-1)(x-2)>0 \end{aligned}$$

より，$f(x)>x$ が成り立つから,

$0<x_n<1$ より，$x_n<f(x_n)$ すなわち $x_n<x_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

が成り立つことが示された. **【証明終】**

◇ ♡

**解説**

関数と数列の融合問題です.(2) 以降は，$f(x)$ が単調増加であることが重要なポイントとなります.(3) では，$a$ の条件から，$0<x_1<1$ となるので，すべての自然数 $n$ に対して，$0<x_n<1$ であることを示し，これと関数の単調増加性を用いて $x_n<x_{n+1}$ を示します.