3 （'99　筑波大） **【難易度】** … 標準

e を自然対数の底とする．関数 $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ．

（1）$g(x)=(1+e^x)^2f'(x)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)$ を求めよ．

必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いてよい．

（2）$f(x)$ はただ 1 つの極値をもち，さらにそれが極大値であることを示せ．

【テーマ】：関数の極限と極値

方針

$g(x)$ は $f'(x)$ の分子を表しています．(1) の結果を利用して (2) を示します．

解答

（1）$f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ を x で微分して，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-e^{x-1})(1+e^x)-(x-e^{x-1})e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1-e^{x-1}+e^x-e^{2x-1}-xe^x+e^{2x-1}}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1-e^{x-1}+(1-x)e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1-\frac{1}{e}\cdot e^x+(1-x)e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{1+\left(1-\frac{1}{e}-x\right)e^x}{(1+e^x)^2} \end{aligned}$$

よって，$g(x)=1+\left(1-\dfrac{1}{e}-x\right)e^x$ であるから，

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{e}-x\right)e^x\right\}=\boldsymbol{-\infty}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

次に，$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき，$t\to+\infty$ である．したがって，

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}g(x) &= \lim_{t\to+\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{e}+t\right)e^{-t}\right\} \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{e}\right)e^{-t}+\frac{t}{e^t}\right\} \\ &= \mathbf{1}\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$

（2）**【証明】**

$g(x)=1+\left(1-\dfrac{1}{e}-x\right)e^x$ であるから，x で微分して，

$$\begin{aligned} g'(x) &= -e^x+\left(1-\frac{1}{e}-x\right)e^x \\ &= -\left(x+\frac{1}{e}\right)e^x \end{aligned}$$

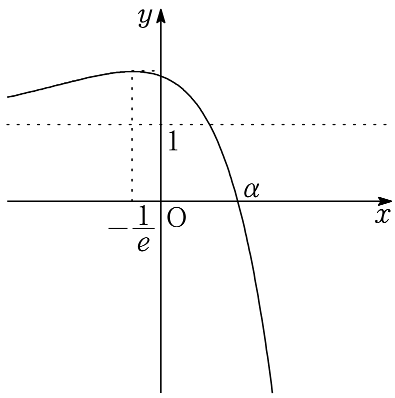
$g'(x)=0$ のとき，$x=-\dfrac{1}{e}$ であるから，増減表は次のようになる．

$$g\left(-\frac{1}{e}\right)=1+\left(1-\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)e^{-\frac{1}{e}}$$
$$=1+e^{-\frac{1}{e}}>0$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{e}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

よって，$y=g(x)$ は $x>-\dfrac{1}{e}$ で単調減少し，

(1) の結果から，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}=-\infty$ であるから，$g(x)=0$ は $x>-\dfrac{1}{e}$ で，ただ 1 つの実数解をもつ．また，$x\leqq-\dfrac{1}{e}$ で $y=g(x)$ は単調増加で，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=1$ であるから，$g(x)=0$ は $x\leqq-\dfrac{1}{e}$ で実数解をもたない．



ゆえに，$g(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつので，その実数解を $x=\alpha$ とすると，$f'(x)=0$ を満たす実数解もただ 1 つで，その実数解は $x=\alpha$ である．よって，増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

したがって，増減表より $f(x)$ はただ 1 つの極値をもち，それが極大値であることが示された．　**（証明終）**

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

(1) は，簡単な関数の極限です．$f'(x)$ が求められれば完答しなければならない問題です．(2) は，(1) の結果を用いますが，$f(x)$ が極値をもつためには，$f'(x)=0$ を満たす実数解が存在し，さらに，$f'(x)=0$ となる x の値の前後で $f'(x)$ の符号が変わらなければいけません．そのために，$g(x)$ が用意されています．$g(x)=0$ を満たす x の値は求めることができないので，文字で代用します．そうすることで $f(x)$ に関する増減表が書けるので，ただ 1 つの極大値をもつことが示せます．