5 （'00 一橋大） **【難易度】** … 標準

三角錐 ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である．AB $=3$ で，辺 AB 上の 2 点 E, F は，
AE $=$ EF $=$ FB $=1$ をみたし，

$$\angle\mathrm{DAC}=30^\circ,\ \angle\mathrm{DEC}=45^\circ,\ \angle\mathrm{DBC}=60^\circ$$

である．

(1) 辺 CD の長さを求めよ．

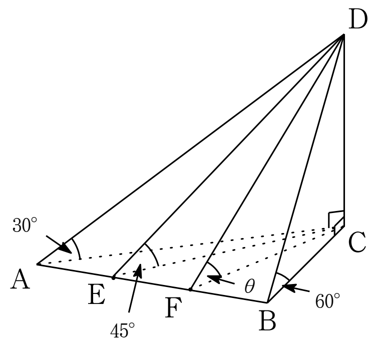
(2) $\theta=\angle\mathrm{DFC}$ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ．

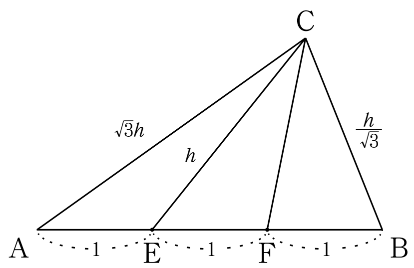
【テーマ】：空間図形の計量

方針

(1) は，高さを h とおけば，底面の辺の長さが h を用いて表せるので，余弦定理を活用します．(2) は，(1) の結果を用いて余弦定理を利用します．中線定理を利用することもできます．

解答





(1) CD $=h$ とおくと，

$$\mathrm{AC}=\frac{h}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}h$$
$$\mathrm{EC}=h$$
$$\mathrm{BC}=\frac{h}{\tan 60^\circ}=\frac{h}{\sqrt{3}}$$

ここで，△ABC で余弦定理より，

$$\cos A=\frac{9+3h^2-\frac{1}{3}h^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}h}=\frac{8h^2+27}{18\sqrt{3}h}\ \cdots\cdots ①$$

一方，△AEC で余弦定理より，

$$\cos A=\frac{1+3h^2-h^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{3}h}=\frac{2h^2+1}{2\sqrt{3}h}\ \cdots\cdots ②$$

よって，①, ② より，

$$\frac{8h^2+27}{18\sqrt{3}h}=\frac{2h^2+1}{2\sqrt{3}h}\iff h^2=\frac{9}{5}$$

$h>0$ より，$h=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ である．したがって，$\mathbf{CD}=\dfrac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$……(**答**)

(2) $\mathrm{FC}=\dfrac{\mathrm{CD}}{\tan\theta}\iff\tan\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}\mathrm{FC}}\ \cdots\cdots ③$

② より，

$$\cos A=\frac{2\cdot\frac{9}{5}+1}{2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}}=\frac{23}{6\sqrt{15}}$$

であるから，△AFC で余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{FC}^2&=3h^2+4-2\cdot\sqrt{3}h\cdot 2\cdot\cos A\\&=3\cdot\frac{9}{5}+4-4\sqrt{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{23}{6\sqrt{15}}\\&=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

である．FC >0 より，FC $=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ であるから，③ より，$\tan\theta=3$ を得る．したがって，

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{10}$$

題意より，$\cos\theta>0$ となるので，$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$……(**答**)

別解

FC は，次のように中線定理を用いても求められます．こちらの方が計算量が減るので，比較的簡単に求まります．

△BCE で中線定理より，

$$\mathrm{CE}^2+\mathrm{CB}^2=2(\mathrm{EF}^2+\mathrm{FC}^2)$$

$$h^2+\frac{1}{3}h^2=2(1+\mathrm{FC}^2)$$

$$\mathrm{FC}^2=\frac{2}{3}h^2-1$$

$$\mathrm{FC}^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}-1=\frac{1}{5}$$

FC >0 より，FC $=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

◇ ♡

解説

(1) は，与えられた角度から，△ABC の辺の長さなどが h を用いて表せるので，空間図形の問題というよりむしろ平面図形の問題に近いです．余弦定理を用いて連立方程式を作って解答します．

(2) は，解説では余弦定理を用いて解答しましたが，FC の長さであれば，別解のように，中線定理を利用して求めることもできます．$\tan\theta$ の値が分かれば $\cos\theta$ の値がわかるので，相互関係の式を用いて $\cos\theta$ を求めましょう．$\cos\theta$ の値ですが，題意から θ は鋭角であることはすぐにわかるので，$\cos\theta>0$ を忘れずに！