

6 ('12 東北大)

【難易度】…標準

 s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x = s + t + 1, y = s - t - 1$ とおく。 s, t が $s \geq 0, t \geq 0$ の範囲を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。
- (2) $x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$ とおく。 s, t が実数全体を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

【テーマ】：不等式を満たす領域

方針

(1) は s, t を x, y で表し、 $s \geq 0, t \geq 0$ という条件から領域を図示します。(2) は置き換えを用いて実数条件を利用して領域を図示します。

解答

(1)

$$\begin{cases} x = s + t + 1 & \cdots \cdots \text{①} \\ y = s - t - 1 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

① + ② より、

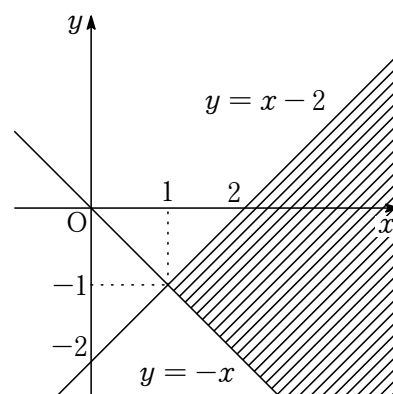
$$x + y = 2s \iff s = \frac{1}{2}(x + y)$$

であり、① - ② より、

$$x - y = 2t + 2 \iff t = \frac{1}{2}(x - y - 2)$$

である。 $s \geq 0, t \geq 0$ より、

$$x + y \geq 0 \text{ かつ } x - y - 2 \geq 0$$

であるから、 (x, y) の動く範囲は、右図斜線部分で境界線を含む。

(2)

$$\begin{cases} x = st + s - t + 1 & \cdots \cdots \text{③} \\ y = s + t - 1 & \cdots \cdots \text{④} \end{cases}$$

③ より、

$$x = (s - 1)(t + 1) + 2$$

④ より、

$$y = (s - 1) + (t + 1) - 1$$

と変形できるので、 $u = s - 1, v = t + 1$ とおくと、

$$\begin{cases} x = uv + 2 & \iff uv = x - 2 \\ y = u + v - 1 & \iff u + v = y + 1 \end{cases}$$

となり、 s, t がすべての実数をとるとき、 u, v はすべての実数をとる。したがって、 u, v を 2 解にもつ 2 次方

程式は,

$$p^2 - (y+1)p + x - 2 = 0$$

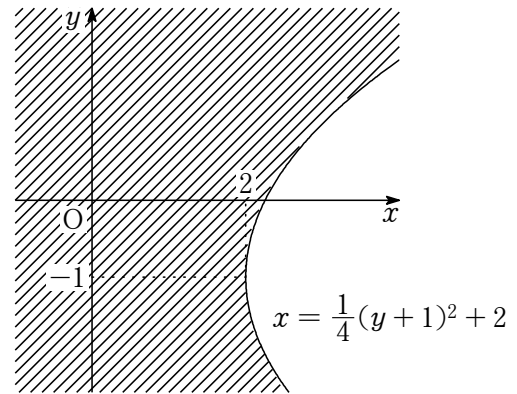
であり,これが実数解をもつことから,判別式を D とすると,

$$D = (y+1)^2 - 4(x-2) \geq 0$$

$$4x \leq (y+1)^2 + 8$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{4}(y+1)^2 + 2$$

よって, (x, y) の動く範囲は,右図斜線部分で境界線を含む.



解説

(1) は, s, t に関する連立方程式と考えて s, t を x, y で表せば, $s \geq 0, t \geq 0$ という条件から (x, y) の動く領域が求まります.

(2) は, (1) と同様にすることができません. ここでは, x, y を $s-1, t+1$ で表すことがポイントとなります. 解答のように u, v を定めれば, $u+v$ と uv が得られます. 経験を積んでいけばこの先は実数条件で領域が求まることは容易に想像できますが, 経験がないと見通しが立たないため難しいでしょう.