29 （'90　愛媛大） **【難易度】** … 標準

すべての実数 x について，不等式

$$-1 \leqq 2a\sin x - \cos 2x + b \leqq 3$$

が成り立つとき，点 (a, b) の存在範囲を図示せよ．

【テーマ】：条件を満たす点の存在範囲

方針

$t = \sin x$ として，2 次不等式に変形して考えます．

♣ ♠

解答

$2a\sin x - \cos 2x + b = 2\sin^2 x + 2a\sin x + b - 1$ であるから，$t = \sin x$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり，

$$2\sin^2 x + 2a\sin x + b - 1 = 2t^2 + 2at + b - 1$$

となる．ゆえに，$-1 \leqq t \leqq 1$ で常に

$$-1 \leqq 2t^2 + 2at + b - 1 \leqq 3$$

が成り立つための点 (a, b) の存在範囲を求めればよい．

$$f(t) = 2t^2 + 2at + b - 1$$

とおくと，

$$f(t) = 2\left(t + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} + b - 1$$

(i) $-\dfrac{a}{2} < -1$ すなわち $a > 2$ のとき，

$$f(-1) \geqq -1 \text{ かつ } f(1) \leqq 3 \iff 2 - 2a + b - 1 \geqq -1 \text{ かつ } 2 + 2a + b - 1 \leqq 3$$

$$\therefore\ b \geqq 2a - 2 \text{ かつ } b \leqq -2a + 2$$

これを満たす (a, b) は存在しない．

(ii) $-1 \leqq -\dfrac{a}{2} < 0$ すなわち $0 < a \leqq 2$ のとき，

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) \geqq -1 \text{ かつ } f(1) \leqq 3 \iff -\frac{a^2}{2} + b - 1 \geqq -1 \text{ かつ } b \leqq -2a + 2$$

$$\therefore\ b \geqq \frac{a^2}{2} \text{ かつ } b \leqq -2a + 2$$

(iii) $0 \leqq -\dfrac{a}{2} < 1$ すなわち $-2 < a \leqq 0$ のとき，

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) \geqq -1 \text{ かつ } f(-1) \leqq 3 \iff b \geqq \frac{a^2}{2} \text{ かつ } 2 - 2a + b - 1 \leqq 3$$

$$\therefore\ b \geqq \frac{a^2}{2} \text{ かつ } b \leqq 2a + 2$$

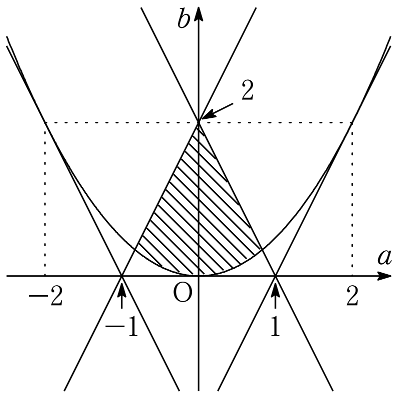
(iv) $1 \leqq -\dfrac{a}{2}$ すなわち $a \leqq -2$ のとき，

$$f(1) \geqq -1 \text{ かつ } f(-1) \leqq 3 \iff 2 + 2a + b - 1 \geqq -1 \text{ かつ } b \leqq 2a + 2$$

$$\therefore\ b \geqq -2a - 2 \text{ かつ } b \leqq 2a + 2$$

これを満たす (a, b) は存在しない．

したがって，(i) ～ (iv) より，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は，下図斜線部分で，境界線上の点を含む．



◇ ♡

[解説]

三角不等式が常に成り立つための点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求める問題ですが，実質は 2 次関数の解の配置問題です．$t = \sin x$ とおいて，t の 2 次不等式にしますが，置き換えた後の文字 t のとり得る値の範囲を求めることを忘れないようにしましょう．また，t の 2 次関数では，軸に文字を含んでいるので場合分けが必要になる点に注意しましょう．