

8

('91 大阪大)

【難易度】…標準

放物線 $y = ax^2 - bx + b$ と直線 $y = a^2x$ を考える．この放物線と直線は 2 交点 P, Q をもち, P と Q の x 座標の差の絶対値は 1 であるという．ただし $a > 0$ とする．放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を d とする．

- (1) d を a を用いて表せ．
 (2) d を最大にする a と b の値を求めよ．

【テーマ】: 放物線と直線

方針

P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とし, 解と係数の関係から p, q の関係式を求めます．

解答

- (1) 点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q ($p < q$) とすると, 題意より,

$$q - p = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ．このとき, p, q は

$$ax^2 - bx + b = a^2x \iff ax^2 - (a^2 + b)x + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の 2 解であるから, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} p + q = \frac{a^2 + b}{a} & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ pq = \frac{b}{a} & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つ．

次に, $y = ax^2 - bx + b$ 上の点 $(t, at^2 - bt + b)$ と $y = a^2x$ の距離を h とすると,

$$h = \frac{|at^2 - bt + b - a^2t|}{\sqrt{a^4 + 1}} = \frac{|a(t-p)(t-q)|}{\sqrt{a^4 + 1}} \quad (\because \textcircled{3}, \textcircled{4})$$

よって, h が最大となるのは, $t = \frac{p+q}{2}$ のときで, このとき,

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left| a \left(\frac{p+q}{2} - p \right) \left(\frac{p+q}{2} - q \right) \right|}{\sqrt{a^4 + 1}} \\ &= \frac{a |(q-p)(p-q)|}{4\sqrt{a^4 + 1}} \\ &= \frac{a(q-p)^2}{4\sqrt{a^4 + 1}} \\ &= \frac{a}{4\sqrt{a^4 + 1}} \cdots \cdots (\text{答}) \quad (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

- (2) (1) より, $d = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}}$ である．

$a > 0$ より, 相加平均・相乗平均の関係より,

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a^2}} = 2$$

等号は, $a^2 = \frac{1}{a^2}$ すなわち $a^4 = 1$ であるから, $a > 0$ より, $a = 1$ のとき成立する. このとき, ② より,

$$x^2 - (b+1)x + b = 0 \iff (x-b)(x-1) = 0$$

よって, $x = 1, b$ である. ① より,

$$b - 1 = 1 \text{ または } 1 - b = 1$$

すなわち,

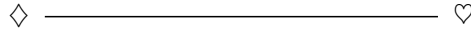
$$b = 2 \text{ または } b = 0$$

であるから, d を最大にする a, b の値は,

$$(a, b) = (1, 0), (1, 2)$$

で, このとき d は最大値 $\frac{\sqrt{2}}{8}$ をとる. ゆえに, 求める a, b の値は,

$$(a, b) = (1, 0), (1, 2) \cdots \cdots (\text{答})$$



解説

まずは, 点 P, Q の座標を設定することから始めます. 放物線と直線の交点なので, p, q は 2 次方程式の 2 解であることがわかるので, 解と係数の関係を利用しましょう. あとは, 条件から式を作って, d を求めます. d が最大となるのは, 放物線上の点における接線が直線 $y = a^2x$ に平行になるときであることを理解しておきましょう. h の式変形ですが, ③, ④ を用いて簡単に式変形しているように感じますがこれは, p, q が ② の方程式の解であることを考えれば容易に解決します. つまり, h の分子だけを見ると,

$$at^2 - bt + b - a^2t = 0 \text{ の 2 解が } p, q \text{ なので, } at^2 - bt + b - a^2t = a(t-p)(t-q)$$

と因数分解できるのです.