43 （′02　大阪大） 【難易度】 … 標準

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $\mathrm{P}(0, \sin\alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする．円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし，A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ $\ell_{\mathrm{A}}, \ell_{\mathrm{B}}$ とする．2 直線 $\ell_{\mathrm{A}}, \ell_{\mathrm{B}}$ ではさまれた領域の部分で，円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1，円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする．いま，D_1, D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha), V_2(\alpha)$ とする．

(1) $V_1(\alpha), V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ．

(2) α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

(1) は，グラフをかいて状況を判断し，グラフの対称性を用いて計算をします．計算量が多いので，正確な計算をしましょう．(2) は，微分をするだけですが，$t=\cos\alpha$ と置けば 3 次関数の微分ですむので計算が楽になります．もちろん，置き換えをしたので，t の範囲に注意しましょう．

♣ ♠

解答

(1) C_2 の方程式は，

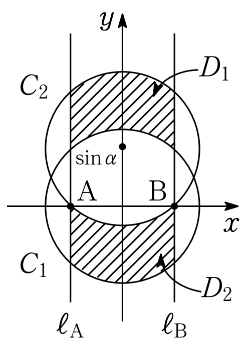
$$x^2+(y-\sin\alpha)^2=1$$

である．よって，x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ として，

$$x^2=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$$

$$\therefore\quad x=\pm\cos\alpha$$

であるから，$\mathrm{A}(-\cos\alpha, 0)$，$\mathrm{B}(\cos\alpha, 0)$ と置くことができる．



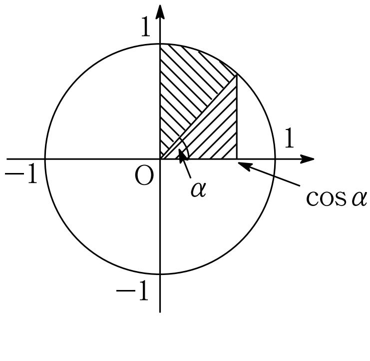
領域 D_1, D_2 は，右図斜線部分（境界を含む）であり，C_2 について，

$$x^2+(y-\sin\alpha)^2=1 \iff y=\sin\alpha\pm\sqrt{1-x^2}$$

であるから，y 軸に関する対称性より，

$$\begin{aligned}V_1(\alpha)&=2\int_0^{\cos\alpha}\left\{\pi\left(\sin\alpha+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\pi(1-x^2)\right\}dx\\&=2\pi\int_0^{\cos\alpha}\left(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sqrt{1-x^2}\right)dx \cdots\cdots ①\\&=2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha+4\pi\sin\alpha\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx\end{aligned}$$

ここで，定積分 $\displaystyle\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$ の値は，右図の斜線部分（扇形と直角三角形を合わせた部分）の面積に等しいことから，



$$\begin{aligned}\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx&=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

である．したがって，

$$
\begin{aligned}
V_1(\alpha) &= 2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha + 4\pi\sin\alpha\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right) \\
&= 2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha + \pi^2\sin\alpha - 2\pi\alpha\sin\alpha + 2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= \boldsymbol{4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha + \pi(\pi - 2\alpha)\sin\alpha}\cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
V_2(\alpha) &= 2\int_0^{\cos\alpha}\left\{\pi(1-x^2) - \pi\left(\sin\alpha - \sqrt{1-x^2}\right)^2\right\}dx \\
&= 2\pi\int_0^{\cos\alpha}\left(-\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sqrt{1-x^2}\right)dx \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

であるから, ①, ② より,

$$
\begin{aligned}
V_1(\alpha) - V_2(\alpha) &= 2\pi\int_0^{\cos\alpha}(2\sin^2\alpha)\,dx \\
&= \boldsymbol{4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha}\cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2)　$f(\alpha) = 4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha$ とおくと,

$$f(\alpha) = 4\pi(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$

であるから, $\cos\alpha = t$ とおくと, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < t < 1$ であり,

$$f(\alpha) = 4\pi(1-t^2)t = 4\pi(t - t^3)$$

である. $g(t) = t - t^3$ とおくと, $g'(t) = 1 - 3t^2$ であるから, $g'(t) = 0$ のとき, $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($\because$ $0 < t < 1$) である. したがって, 増減表は次のようになる.

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって, $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $g(t)$ は最大値

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

をとるので, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $f(\alpha)$ は最大値

$$\boldsymbol{\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi}\cdots\cdots\text{(答)}$$

をとる.

◇ ♡

解説

円と円で囲まれた部分の面積を求めるので, 円の方程式を $y = f(x)$ の形に変形して考えます. $x^2 + y^2 = 1$ は $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ のようにかけますが $+$ のときが円の上半分で, $-$ のときが円の下半分を表しています. また, このことから, (1) の面積を計算する途中で出てきた定積分 $\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$ の値は, 円を考えれば, 扇形と三角形の面積の和として求めることができます. もちろん, $x = \sin\theta$ と置換積分をしても求めることができます. (1) の後半の $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ は, $V_2(\alpha)$ を求めてから計算するよりも, ①, ② のように定積分の計算途中を用いると計算が楽になります. 計算力だけでなく上手に計算する術も身に付けておきましょう. (2) は, 最大値を求める基本計算なので, (1) ができたのなら完答したい問題です. $\cos\alpha = t$ と置換すれば解答のように 3 次関数に帰着できますが, そのまま微分をしてもたいした計算量の差にはならないです.