3 （′12　一橋大）　**【難易度】** … やや難

1 つの角が 120° の三角形がある．この三角形の 3 辺の長さ $x,\, y,\, z$ は $x < y < z$ を満たす整数である．

（1） $x + y - z = 2$ を満たす $x,\, y,\, z$ の組をすべて求めよ．

（2） $x + y - z = 3$ を満たす $x,\, y,\, z$ の組をすべて求めよ．

（3） $a,\, b$ を 0 以上の整数とする．$x + y - z = 2^a 3^b$ を満たす $x,\, y,\, z$ の組の個数を a と b の式で表せ．

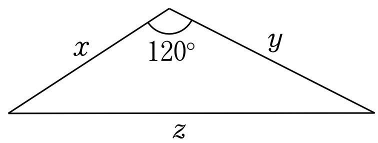
【テーマ】：整数問題

方針

(1), (2) は，余弦定理を用いて $x,\, y,\, z$ の関係式を導き，与えられた条件式を代入することで z を消去します．
(3) は，(1), (2) と同様に考えますが，$x < y < z$ であることを利用して個数を計算しましょう．

解答

（1） 与えられた三角形は右図のようになるので，余弦定理より，



$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ$$
$$= x^2 + y^2 + xy \cdots\cdots ①$$

である．ここで，$x + y - z = k$ のとき，① へ代入して z を消去すると，

$$(x + y - k)^2 = x^2 + y^2 + xy \iff x^2 + y^2 + k^2 + 2xy - 2kx - 2ky = x^2 + y^2 + xy$$
$$\iff xy - 2kx - 2ky + k^2 = 0$$
$$\iff (x - 2k)(y - 2k) = 3k^2 \cdots\cdots ②$$

となる．$k = 2$ のとき，② より，

$$(x - 4)(y - 4) = 12 \cdots\cdots ③$$

であり，$0 < x < y$ であることから，$-4 < x - 4 < y - 4$ となる．$x - 4,\, y - 4$ はともに整数であることから ③ を満たす整数 $x - 4,\, y - 4$ の組合せは，次の 3 通りがある．

$x-4$	1	2	3
$y-4$	12	6	4

$\xrightarrow{z=x+y-2}$

x	5	6	7
y	16	10	8
z	19	14	13

これらはともに $x < y < z$ を満たしている．よって，求める $x,\, y,\, z$ の組は，

$$\boldsymbol{(x,\, y,\, z) = (5,\, 16,\, 19),\, (6,\, 10,\, 14),\, (7,\, 8,\, 13)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

（2） $k = 3$ のとき，② より，

$$(x - 6)(y - 6) = 27 \cdots\cdots ④$$

であり，$0 < x < y$ であることから，$-6 < x - 6 < y - 6$ となる．$x - 6,\, y - 6$ はともに整数であることから ④ を満たす整数 $x - 6,\, y - 6$ の組合せは，次の 2 通りがある．

$x-6$	1	3
$y-6$	27	9

$\xrightarrow{z=x+y-3}$

x	7	9
y	33	15
z	37	21

これらはともに $x<y<z$ を満たしている．よって，求める $x,\,y,\,z$ の組は，

$$(\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y},\,\boldsymbol{z})=\mathbf{(7,\,33,\,37),\,(9,\,15,\,21)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(3)　$k=2^a3^b$ のとき，② より，

$$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)=2^{2a}3^{2b+1}\ \cdots\cdots\ ④$$

であり，$0<x<y$ であることから，$-2^{a+1}3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b$ となる．$x-2^{a+1}3^b,\,y-2^{a+1}3^b$ はともに整数であるから，かけて $2^{2a}3^{2b+1}$ となる 2 つの整数の組合せを考える．ここで，$X=x-2^{a+1}3^b$，$Y=y-2^{a+1}3^b$ とおき，$X<Y<0$ となる整数 $X,\,Y$ の組合せを考える．このとき，$-X=X'$，$-Y=Y'$ とすると，④ と $-2^{a+1}3^b<X<Y<0$ より，

$$X'Y'=2^{2a}3^{2b+1},\quad 0<Y'<X'<2^a3^b$$

である．したがって，

$$2^{2a}3^{2b+1}=X'Y'<(X')^2<2^{2a}3^{2b}$$

となり，矛盾するので，$0<X<Y$ となる組合せのみを考えればよい．このとき，$X,\,Y$ の 1 組に対して $x,\,y$ も 1 組あるので，$X,\,Y$ の組数を求めればよい．

$$XY=2^{2a}3^{2b+1}$$

を満たす正の整数 $X,\,Y$ は $2^{2a}3^{2b+1}$ の正の約数の個数に等しいので，

$$(2a+1)(2b+2)\ (\text{個})$$

ある．$X\fallingdotseq Y$ であり，$X<Y,\,X>Y$ となるものが同数存在することから，求める個数は，

$$\mathbf{(2\boldsymbol{a}+1)(\boldsymbol{b}+1)}\ (\textbf{個})\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇　♡

解説

(1), (2) は，基本的な不定方程式の問題なので，完答をねらいたい問題です．(3) を解く際に，(1), (2) で『負の整数の組の存在の有無』と『右辺の整数の約数』について注意が配れたかどうかがポイントになります．本問のように不定方程式を解く際は，かけて整数となるような 2 数の組合せを考えます．一般には，右辺の約数を書き並べればよいのですが，大小と正負を考えなければいけません．これらを吟味するだけで書き出す場合の数は劇的に減ることがあります．大小は問題文で $x<y<z$ と与えられているので，必然的に注意ができます．負の数の存在は，仮に無視していても答えには出てこないので，正解しているように錯覚します．しかし，負の数の議論が本問の一番のポイントとなる (3) では，負の数を除外するための記述がないと減点は避けられないでしょう．