

4 ('10 奈良県立医科大)

【難易度】… 難

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \beta = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ とおく.}$$

- (1) 任意の正整数 n に対して $\alpha^n + \beta^n$ は整数であることを証明せよ.
- (2) 実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[r]$ で表し, r の小数部分 $\{r\}$ を $\{r\} = r - [r]$ と定義する. このとき, 2 個の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\alpha^{2n}\}, \lim_{n \rightarrow \infty} \{\alpha^{2n+1}\}$ を求めよ.