4 ('10 奈良県立医科大) 【難易度】… やや難

$\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, $\beta = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ とおく.

(1) 任意の正整数 n に対して $\alpha^n + \beta^n$ は整数であることを証明せよ.

(2) 実数 r に対して r を超えない最大の整数を $[\,r\,]$ で表し, r の小数部分 $\{r\}$ を $\{r\} = r - [\,r\,]$ と定義する. このとき, 2 個の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\alpha^{2n}\}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\alpha^{2n+1}\}$ を求めよ.

【テーマ】:数列の極限

方針

(1) は数学的帰納法で証明します. (2) は $-\dfrac{1}{2} < \beta < 0$ を利用することがポイントとなります.

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

与えられた α, β から,

$$\alpha + \beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2} + \frac{3-\sqrt{13}}{2} = 3$$

$$\alpha\beta = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{13}}{2} = -1$$

である. 一方,

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha+\beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n)$$

であるから, $a_n = \alpha^n + \beta^n$ とおくと,

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n \cdots\cdots ①$$

が成り立つことが分かる. a_n が任意の正整数に対して整数であることを数学的帰納法を用いて証明する.

(i) $n = 1$ のとき, $a_1 = 3$ であり, $n = 2$ のとき,

$$a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 11$$

であるから, $n = 1, 2$ のとき, a_n は整数である.

(ii) $n = k, k+1$ $(k \geqq 1)$ のとき, a_k, a_{k+1} が整数であると仮定すると, ① の漸化式から, a_{k+2} は整数となる. したがって, $n = k+2$ のときも a_n は整数である.

ゆえに, 数学的帰納法によって a_n は整数であることが示された. **(証明終)**

(2) $a_{2n} = \alpha^{2n} + \beta^{2n}$ であり, (1) より, a_{2n} は整数である.

$$\alpha^{2n} = a_{2n} - \beta^{2n} \cdots\cdots ②$$

である. ここで, $3 < \sqrt{13} < 4$ より,

$$-\frac{1}{2} < \frac{3-\sqrt{13}}{2} < 0 \iff -\frac{1}{2} < \beta < 0$$

であるから,

$$0 < \beta^{2n} < \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1} < \beta^{2n+1} < 0 \cdots\cdots ③$$

となる．したがって，

$$[\,a_{2n}-\beta^{2n}\,]=a_{2n}-1\ ,\quad [\,a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\,]=a_{2n+1}$$ ☞ 解説

である．ゆえに，② より，

$$\begin{aligned}\{\alpha^{2n}\}&=\{a_{2n}-\beta^{2n}\}\\&=a_{2n}-\beta^{2n}-[\,a_{2n}-\beta^{2n}\,]\\&=a_{2n}-\beta^{2n}-(a_{2n}-1)\\&=1-\beta^{2n}\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\{\alpha^{2n+1}\}&=\{a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\}\\&=a_{2n+1}-\beta^{2n+1}-[\,a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\,]\\&=a_{2n+1}-\beta^{2n+1}-a_{2n+1}\\&=-\beta^{2n+1}\end{aligned}$$

③ より，$n\to\infty$ のとき，$\beta^{2n}\to 0$，$\beta^{2n+1}\to 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\{\alpha^{2n}\}=\mathbf{1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$$\lim_{n\to\infty}\{\alpha^{2n+1}\}=\mathbf{0}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇ ♡

解説

(1) は，$\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ が整数ならば $\alpha^n+\beta^n$ は整数であるということを示す有名問題で漸化式を作ることができれば容易に示せます．隣接 3 項間漸化式を用いて数学的帰納法で示すので，前 2 つの項の情報が必要になります．したがって，2 つ仮定しなければいけないので注意しましょう．

(2) は，類題を経験していれば比較的方針が立て易いですが，経験がないと難しいと感じる問題ではないでしょうか．2003 年東京大学に類題があります．ポイントは，

$$|\,r\,|<1 \text{ ならば } |\,r^n\,|<1 \text{ なので，} \lim_{n\to\infty}r^n=0$$

が成り立つことです．③ 式から，β^{2n} は 0 より大きく 1 より小さい実数であることがわかります．したがって，$a_{2n}-\beta^{2n}$ は a_{2n} より，少しだけ小さくなります（下左図参照）．ゆえに，$[\,a_{2n}-\beta^{2n}\,]=a_{2n}-1$ となります．$[\,a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\,]$ も同様に考えることができます．$0<-\beta^{2n+1}<1$ なので，$a_{2n+1}-\beta^{2n+1}$ は a_{2n+1} より少しだけ大きくなります（下右図参照）．したがって，$[\,a_{2n+1}-\beta^{2n+1}\,]=a_{2n+1}$ となります．