

15 (14 富山大)

【難易度】…標準

定数  $k$  に対して、方程式

$$(\log_2 x)^2 - (k+2)\log_2 x - k + 17 = 0$$

を考える。

- (1) 方程式が実数解  $\alpha, \beta$  をもつとき、 $\log_2(\alpha\beta)$  と  $(\log_2 \alpha)(\log_2 \beta)$  を  $k$  を用いて表せ。
- (2) 方程式が 4 より大きい異なる 2 つの実数解をもつような  $k$  の値の範囲を求めよ。

【テーマ】: 対数方程式

方針

(1) は、解と係数の関係を用います。(2) は、(1) の結果を使っても解けますし、使わなくても解けます。

解答

- (1) 真数条件より、
- $x > 0$
- である。

 $\log_2 x = t$  とおくと、与式は

$$t^2 - (k+2)t - k + 17 = 0 \dots\dots ①$$

となり、この方程式の 2 解は  $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$  であるから、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \log_2 \alpha + \log_2 \beta = k + 2 \\ (\log_2 \alpha)(\log_2 \beta) = -k + 17 \end{cases}$$

したがって、

$$\begin{cases} \log_2 \alpha\beta = k + 2 \\ (\log_2 \alpha)(\log_2 \beta) = -k + 17 \end{cases} \dots\dots(\text{答})$$

- (2)
- $x > 4$
- より、
- $\log_2 x > \log_2 4$
- であるから、
- $t > 2$
- である。与えられた方程式が 4 より大きい異なる 2 つの実数解をもつためには、
- $t$
- についての方程式 ① が 2 より大きい異なる 2 つの実数解をもてばよい。すなわち、① の判別式を
- $D$
- とするとき、

$$D > 0 \text{ かつ } \log_2 \alpha > 2, \log_2 \beta > 2$$

が成り立てばよい。

$$D = (k+2)^2 - 4(-k+17) > 0 \iff k^2 + 8k - 64 > 0$$

$$\therefore k < -4 - 4\sqrt{5}, -4 + 4\sqrt{5} < k \dots\dots ②$$

また、 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta > 4$  より、(1) から、

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = k + 2 > 4 \iff k > 2 \dots\dots ③$$

さらに、 $\log_2 \alpha - 2 > 0, \log_2 \beta - 2 > 0$  より、

$$(\log_2 \alpha - 2)(\log_2 \beta - 2) > 0$$

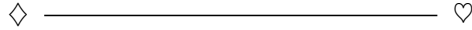
であるから、

$$(\log_2 \alpha)(\log_2 \beta) - 2(\log_2 \alpha \beta) + 4 > 0 \iff -k + 17 - 2(k + 2) + 4 > 0$$

$$\therefore k < \frac{17}{3} \dots\dots \textcircled{4}$$

ゆえに, ②~④より, 求める  $k$  の値の範囲は,

$$-4 + 4\sqrt{5} < k < \frac{17}{3} \dots\dots (\text{答})$$



**解説**

(1) は, 与えられた方程式の形から  $\log_2 x = t$  とおき,  $t$  に関する 2 次方程式を作る基本問題です. 方程式の 2 解が  $\alpha, \beta$  と与えられているので,  $t$  に関する 2 次方程式 ① の 2 解は,  $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$  となります.

(2) は, (1) の結果を使う解答にしました. 注意しなければならないのは,

$$\log_2 \alpha > 2, \log_2 \beta > 2 \iff \log_2 \alpha + \log_2 \beta > 4, \log_2 \alpha \log_2 \beta > 4$$

としてはいけない点です. なぜなら, これらは同値ではないからです.  $\implies$  は成り立ちますが, 逆は成り立たません. 反例としては,  $\log_2 \alpha = 1, \log_2 \beta = 5$  などが挙げられます. 必要十分条件にするためには,

$$\log_2 \alpha > 2, \log_2 \beta > 2 \iff \log_2 \alpha + \log_2 \beta > 4, (\log_2 \alpha - 2)(\log_2 \beta - 2) > 0$$

としなければいけませんので, 注意しましょう. なお, 別解としては,  $f(t) = t^2 - (k+2)t - k + 17$  とおき,  $y = f(t)$  のグラフが  $t$  軸と  $t > 2$  で異なる 2 点を共有すればよいので,  $f(t) = 0$  の判別式を  $D$  とすれば,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad D > 0 \\ \text{(ii)} \quad \text{軸} > 2 \\ \text{(iii)} \quad f(2) > 0 \end{array} \right.$$

が成り立てばよいこととなります. これを解くと ②~④ の不等式が得られます.