20 （′13　宮崎大） **【難易度】** … 標準

$-1<x<1$ で定義される関数 $f(x)=2x+\sqrt{5-5x^2}$ について，座標平面上の曲線 $C: y=f(x)$ を考える．このとき，次の各問いに答えよ．

（1）曲線 C は上に凸であることを示し，$f(x)$ の最大値を求めよ．

（2）曲線 C 上の点のうち，原点 O との距離が最大となる点を A，最小となる点を B とするとき，A, B の座標をそれぞれ求めよ．

（3）（2）で求めた点 A, B について，線分 OA，線分 OB，および曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

【テーマ】：最大値・最小値

方針

(1) は凹凸を調べるので $f''(x)$ の符号を考えます．(2) は，原点からの距離を t の式で表して最大値を最小値を求めますが，対称性に着目すれば計算量が減らせます．(3) は，積分計算をするまでもなく面積公式だけで求められます．

♣ ♠

解答

（1）**【証明】**

$f'(x)=2+\dfrac{-10x}{2\sqrt{5-5x^2}}=2-\dfrac{\sqrt{5}x}{\sqrt{1-x^2}}$ であるから，

$$\begin{aligned} f''(x)&=-\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}\\ &=-\sqrt{5}\cdot\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\\ &=\frac{-\sqrt{5}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}<0 \quad (\because\ \ -1<x<1) \end{aligned}$$

よって，$f''(x)<0$ であるから，曲線 C は上に凸であることが示された． **（証明終）**

またこのとき，$f'(x)$ は単調減少であり，$f'(x)=0$ のとき，

$$\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{1-x^2}}=2 \iff 5x^2=4(1-x^2) \text{ かつ } x>0$$

ゆえに，$x=\dfrac{2}{3}$ であるから，増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}+\sqrt{5-\dfrac{20}{9}}=3$ であるから，

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき，最大値は $\mathbf{3}$……(**答**)

(2)　C 上の点を $(t,\,2t+\sqrt{5-5t^2})$ とおき，原点 O との距離を d とすると，

$$\begin{aligned} d^2 &= t^2+(2t+\sqrt{5-5t^2})^2 \\ &= 4t\sqrt{5-5t^2}+5 \\ &= 4\sqrt{5}t\sqrt{1-t^2}+5 \end{aligned}$$

ここで，$g(t)=t\sqrt{1-t^2}$ とおくと，$g(-t)=-g(t)$ であるから，$y=g(t)$ のグラフは原点に関して対称である．よって，$0 \leqq t < 1$ で考える．

$$g(t)=\sqrt{t^2-t^4}=\sqrt{-\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

より，$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で最大値をとる．また，原点に関する対称性により，$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で最小値をとる．

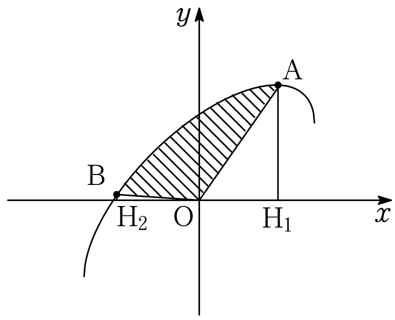
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{5-\frac{5}{2}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{5-\frac{5}{2}}=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$$

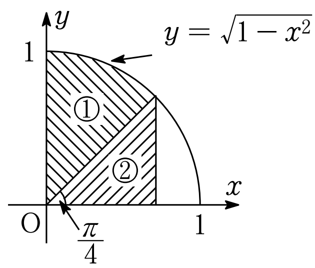
であるから，点 A, B の座標は，

$$\mathbf{A}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}\right),\ \mathbf{B}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}\right)\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　グラフは，右図のようになる．$\mathrm{H_1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,0\right)$，$\mathrm{H_2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,0\right)$ とおく．求める面積を S とすると，



$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(2x+\sqrt{5-5x^2}\right)dx \\ &\quad \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2}}_{\triangle\mathrm{OBH_2}\text{の面積}}\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{2}}_{\triangle\mathrm{OAH_1}\text{の面積}} \\ &= 2\sqrt{5}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{\sqrt{5}}{2} \quad ☞\ \boxed{\text{解説}} \\ &= 2\sqrt{5}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4}}_{\text{右下図 ① の扇形の面積}}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{4}}_{\text{右下図 ② の直角三角形の面積}}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= 2\sqrt{5}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{4}\pi\cdots\cdots(\textbf{答}) \end{aligned}$$



◇　♡

$\boxed{\text{解説}}$

(1) は，凹凸を調べたいので $f''(x)$ の符号を調べるだけです．計算間違いに注意しましょう．(2) は，C 上の点を $(t,\,2t+\sqrt{5-5t^2})$ とおいて，原点との距離 d を求めますが，d が最大・最小となるときは，$t\sqrt{1-t^2}$ が最大・最小になればよいので，ここだけを取り出して考えます．解答の方針では，$y=g(t)$ が原点に関して対称であることを用いて最大・最小となるときを考えていますが，$t=\cos\theta\ (0<\theta<\pi)$ とおいて，三角関数にしても求めることができます．(3) は，面積の計算です．立式は積分を用いますが，実際は，扇形と三角形の面積だけで計算できるので，積分計算をする必要はありません．面積計算 2 行目の定積分の式変形は，偶関数と奇関数の性質を利用して計算をしています．また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$ は，解答のように，円の一部分を考えることで求められる頻出の計算方法ですから，求められるようにしておきましょう．