21 （′14　信州大） 【難易度】 … 標準

n を 0 以上の整数とする．$n+1$ 個の自然数 $2^0,\ 2^1,\ \cdots,\ 2^n$ の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものはいくつあるか．ただし，x を超えない最大の整数を表す記号 $[\,x\,]$ を用いて解答してよい．
注：例えば 2014 の最上位の桁の数字は 2 であり，14225 の最上位の桁の数字は 1 である．

【テーマ】：常用対数

方針
具体的に $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ として実験をして，桁数と最上位の桁の数字の出現回数の関係を考えます．

♣ ♠

解答

2^n が k 桁の整数で，その最上位の数が 1 であるとすると，

$$1\cdot 10^{k-1} \leqq 2^n < 2\cdot 10^{k-1}\quad (k\text{ は自然数})$$

の形で表される．各辺に常用対数をとると，

$$\log_{10}10^{k-1} \leqq \log_{10}2^n < \log_{10}2\cdot 10^{k-1} \iff k-1 \leqq n\log_{10}2 < k-1+\log_{10}2$$

ゆえに，$\log_{10}2>0$ であることから，

$$\frac{k-1}{\log_{10}2} \leqq n < \frac{k-1}{\log_{10}2}+1$$

と変形できるので，これを満たす 0 以上の整数 n は $\left[\dfrac{k-1}{\log_{10}2}\right]+1$ のただ 1 つである．したがって，k 桁の数に対して 2^n の最上位の数が 1 となるものは 1 つしかないことが分かるので，2^n の桁数が $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n$ の中の最上位の桁の数字が 1 であるものの個数と一致する．

$$\log_{10}2^n = n\log_{10}2$$

であることから，2^n が N 桁の整数であるとすれば，

$$10^{N-1} \leqq 2^n < 10^N \iff N-1 \leqq n\log_{10}2 < N \iff n\log_{10}2 < N \leqq n\log_{10}2+1$$

である．したがって，2^n の桁数は $n\log_{10}2+1$ を超えない最大の整数と一致するので，

$$[\,n\log_{10}2+1\,] = [\,n\log_{10}2\,]+1\ (\text{桁})$$

である．ゆえに，$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^n$ の中に，最上位の桁の数字が 1 であるものは，

$$\boldsymbol{[\,n\log_{10}2\,]+1\ (\text{個})}\cdots\cdots(\text{答})$$

ある．

♢ ♡

解説

この問題の本質は，1 から始めて数を 2 倍ずつしていく中で，最上位の桁の数字が 1 になるのはどのようなときであるかを見極めることにあります．順に 2 倍していくと，桁が 1 つ上がったときは必ず最上位の数は 1 になることがわかり，次に 2 倍すれば最上位の数字は 2 または 3 となります．このことから，桁が上がったときだけ最上位の数字が 1 になることが分かるので，これを証明します．よくよく考えれば当たり前のことに感じるかもしれませんが，その本質に気付きそれをきちんと証明する力が問われています．

