22 （'05　北海道大） 【難易度】 … やや難

$f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする．

（1） 自然数 $n,\ m$ に対し，$\displaystyle\int_0^n t^m\,dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m\,dt$ を示せ．

（2） $f(x)$ の次数を r とするとき，次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{r+1}$$

（3） すべての自然数 n に対して $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k)=\frac{1}{2}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ．

【テーマ】：定積分と不等式

方針

(1) は，不等式を用いて証明する方法もあるし，面積の大小関係から証明する方法もあります．(2) は，(1) の結果を用いてはさみうちの原理で証明します．(3) は，(2) の結果を用いて求めます．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

k を 1 以上の自然数とし，$0\leqq k-1\leqq t\leqq k$ を満たす t を考えると，$0\leqq t\leqq k\leqq t+1$ が成り立つ．各辺は正であるから，

$$t^m\leqq k^m\leqq (t+1)^m$$

が成り立つ．この不等式は $k-1\leqq t\leqq k$ で常に成り立つので，各辺を積分すると，

$$\int_{k-1}^{k} t^m\,dt\leqq\int_{k-1}^{k} k^m\,dt\leqq\int_{k-1}^{k}(t+1)^m\,dt \iff \int_{k-1}^{k} t^m\,dt\leqq k^m\leqq\int_{k-1}^{k}(t+1)^m\,dt$$

であり，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ として辺々加えると，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} t^m\,dt\leqq\sum_{k=1}^{n}k^m\leqq\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}(t+1)^m\,dt \iff \int_0^n t^m\,dt\leqq\sum_{k=1}^{n}k^m\leqq\int_0^n(t+1)^m\,dt$$

となり，示された． **（証明終）**

（2） **【証明】**

$f(x)=x^r+g(x)$ （$g(x)$ は $r-1$ 次の整式）とおくと，

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)=\sum_{k=1}^{n}(k^r+g(k))=\sum_{k=1}^{n}k^r+\sum_{k=1}^{n}g(k)$$

一方，(1) より，

$$\int_0^n t^r\,dt\leqq\sum_{k=1}^{n}k^r\leqq\int_0^n(t+1)^r\,dt \iff \frac{1}{r+1}n^{r+1}\leqq\sum_{k=1}^{n}k^r\leqq\frac{1}{r+1}(n+1)^{r+1}$$

$$\frac{1}{r+1}n^{r+1}+\sum_{k=1}^{n}g(k)\leqq\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqq\frac{1}{r+1}(n+1)^{r+1}+\sum_{k=1}^{n}g(k)$$

$$\frac{1}{r+1}+\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}g(k)\leqq\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}f(k)\leqq\frac{1}{r+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r+1}+\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}g(k)\ \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．

$g(x)$ は $r-1$ 次の整式であるから，$g(x)=a_{r-1}x^{r-1}+a_{r-2}x^{r-2}+\cdots+a_1x+a_0$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}g(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}(a_{r-1}k^{r-1}+a_{r-2}k^{r-2}+\cdots+a_1k+a_0)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{a_{r-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{r-1}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{a_{r-2}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{r-2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{n^{r-1}}\cdot\frac{a_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+\frac{1}{n^r}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_0\right)$$

ここで，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r-1$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_i}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^i=\int_0^1 a_ix^i\,dx$ であるから，これは定数である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}g(k)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{a_{r-1}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{r-1}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{a_{r-2}}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{r-2}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+\frac{1}{n^{r-1}}\cdot\frac{a_1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+\frac{1}{n^r}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_0\right)$$
$$=0$$

となる．また，① において，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r+1}=\frac{1}{r+1}$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{r+1}$$

が示された． **（証明終）**

(3)　$f(x)$ の次数を r とする．$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{2}f(n)$ の両辺を $n^r\neq 0$ で割ると，

$$\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{2n^r}f(n)$$

となる．$n\to\infty$ のとき，左辺は (2) より $\dfrac{1}{r+1}$ に収束し，右辺は $f(x)$ の r 次の係数が 1 であることから，$\dfrac{1}{2}$ に収束することがわかる．したがって，

$$\frac{1}{r+1}=\frac{1}{2}\iff r=1$$

となるので，$f(x)=x+a$ とおくことができる．与えられた条件式は，すべての自然数 n に対して成り立つので，$n=1$ のときも成立するため，

$$\frac{1}{1}\sum_{k=1}^{1}f(k)=\frac{1}{2}f(1)\iff f(1)=\frac{1}{2}f(1)\iff f(1)=0$$

を得る．ゆえに，$f(1)=1+a$ であることから $a=-1$ を得る．逆にこのとき，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{1}{n}\cdot\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}=\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}f(n)$$

となり，与えられた条件式は，すべての自然数 n について成立するので，求める $f(x)$ は，

$\boldsymbol{f(x)=x-1}$**……（答）**

◇ ♡

解説

(1) は，最初に不等式を作って証明しましたが，$y=x^m$ のグラフをかいて面積の大小関係から示すこともできます．(2) は，$r-1$ 次以下の扱いをうまく処理する必要があります．$n\to\infty$ とするとき，最高次の部分以外は 0 に収束するということをきちんと説明する必要があります．解答では，区分求積法を用いて定積分を導き出し，それが定数であることから 0 に収束することを示しています．(3) は，(2) の結果を用いることを考えます．$f(x)$ が r 次の整式という条件をあらかじめ述べておかなければ (2) の結果が適応できません．ここから次数を決定することになります．最後は，すべての自然数 n について成り立つなら $n=1$ でも成り立つので，そこから定数項を決定します．ただし，これはあくまで必要条件にすぎないので，十分性の証明をしなければいけないため，逆にすべての自然数 n で成り立つことを確かめています．