

27

('12 東北大)

【難易度】… | 難 |

$AB = 1, AC = \sqrt{3}, \angle BAC = \frac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC を考える. n を 2 以上の自然数とし, 辺 AB を n 等分して得られる点を A に近い方から順に P_1, P_2, \dots, P_{n-1} とする. A を P_0, B を P_n とおくと, 以下の問いに答えよ.

- (1) 三角形 P_kCP_{k+1} ($0 \leq k \leq n-1$) の内接円の半径を求めよ.
- (2) 三角形 P_kCP_{k+1} ($0 \leq k \leq n-1$) の内接円の面積の総和を S_n とする.

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

とおくと, $nS_n \leq \frac{3\pi}{4} I_n$ となることを示せ. また, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ.

- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ.