36 （'03　大阪市立大） 【難易度】 … 標準

p, q は正の有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるとする．自然数 n に対し，有理数 a_n, b_n を

$$(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$$

によって定める．

(1) $(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q}$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$ を示せ．

【テーマ】：数列の極限

方針

(1) は，まず数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に関する漸化式を導いておきます．自然数 n に関する証明なので数学的帰納法を用いて示します．(2) は，与えられた漸化式と (1) の結果から a_n, b_n が具体的に求められるので，$\dfrac{a_n}{b_n}$ を求めて極限を計算します．

解答

(1) **【証明】**

$(p+\sqrt{q})^n = a_n + b_n\sqrt{q}$ …… ①

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{q} &= (p+\sqrt{q})^{n+1} \\ &= (p+\sqrt{q})(p+\sqrt{q})^n \\ &= (p+\sqrt{q})(a_n+b_n\sqrt{q}) \quad (\because\ ①) \\ &= (pa_n+qb_n)+(a_n+pb_n)\sqrt{q} \end{aligned}$$

自然数 n に対して，a_n, b_n は有理数で，$\sqrt{q}$ は無理数であるから，

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots\cdots ② \\ b_{n+1} = a_n + pb_n & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ。① において $n=1$ とすると，

$$p+\sqrt{q} = a_1 + b_1\sqrt{q}$$

であるから，同様にして $a_1 = p, b_1 = 1$ を得る。

$$(p-\sqrt{q})^n = a_n - b_n\sqrt{q} \cdots\cdots ④$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき，

(左辺) $= p-\sqrt{q}$

(右辺) $= a_1 - b_1\sqrt{q} = p-\sqrt{q}$

よって，$n=1$ のとき成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき，

$$(p-\sqrt{q})^k = a_k - b_k\sqrt{q} \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つと仮定する。$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}(p-\sqrt{q})^{k+1} &= (p-\sqrt{q})(p-\sqrt{q})^k \\ &= (p-\sqrt{q})(a_k-b_k\sqrt{q}) \quad (\because\ ⑤) \\ &= a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{q} \quad (\because\ ②, ③)\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i), (ii) より，すべての自然数 n について ④ が成り立つことが示された。

（証明終）

(2) **【証明】**

①＋④ より，

$$2a_n=(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n$$

$$a_n=\frac{(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n}{2}$$

①－④ より，

$$2b_n\sqrt{q}=(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n$$

$$b_n=\frac{(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n}{2\sqrt{q}}$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n} &= \frac{\dfrac{(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n}{2}}{\dfrac{(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n}{2\sqrt{q}}} \\ &= \sqrt{q}\cdot\frac{(p+\sqrt{q})^n+(p-\sqrt{q})^n}{(p+\sqrt{q})^n-(p-\sqrt{q})^n} \\ &= \sqrt{q}\cdot\frac{1+\left(\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}{1-\left(\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n}\end{aligned}$$

$\left|\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right|<1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right)^n=0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{q}$$

となり，示された。

（証明終）

◇ ♡

解説

(1) は，別の方法でも証明できます．漸化式を作るところまでは同じですが，その漸化式から

$$a_{n+1}{}^2-qb_{n+1}{}^2=(p^2-q)(a_n{}^2-qb_n{}^2)$$

が成り立つことを用いて，$a_n{}^2-qb_n{}^2=(p^2-q)^n$ であることを導きます．その後は，

$$(p-\sqrt{q})^n=\left(\frac{p^2-q}{p+\sqrt{q}}\right)^n=\frac{a_n{}^2-qb_n{}^2}{a_n+b_n\sqrt{q}}=a_n-b_n\sqrt{q}$$

となるので，示されます．

(2) は，具体的に a_n, b_n を求めて，$\left|\dfrac{p-\sqrt{q}}{p+\sqrt{q}}\right|<1$ であることに注意すれば極限は求められます．