

2 ('06 徳島大)

【難易度】…標準

実数 θ ($0 < \theta < \pi$) に対して, 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \cdots + \cos^2 n\theta$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) と定める.

- (1) 実数 α, β に対して, $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$ が成り立つことを示せ.
- (2) $(1 + 2 \cos 2\theta + 2 \cos 4\theta + \cdots + 2 \cos 2n\theta) \sin \theta = \sin(2n + 1)\theta$ が成り立つことを示せ.
- (3) $a_n - \frac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cdots + \cos 2n\theta)$ を n の式で表せ. ただし, その式は θ を含んではならない.
- (4) $a_n - \frac{\sin(2n + 1)\theta}{4 \sin \theta}$ を n の式で表せ. ただし, その式は θ を含んではならない.
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$ を求めよ.