13 （'13　東北大）　【難易度】 … 標準

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta,\quad b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底とする．

（1）一般項 b_n を求めよ．

（2）すべての n について，$b_n \leqq a_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ．

（3）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

【テーマ】：定積分と不等式

方針

(1) は，$t = \sin\theta$ と置換しても積分できますが，$\dfrac{1}{n}e^{n\sin\theta}$ を微分すると $e^{n\sin\theta}\cos\theta$ になることを利用することもできます．(2) は，積分区間に着目して不等式を作ります．(3) は，(2) の不等式を用いてはさみうちの原理を用います．

♣ ♠

解答

（1）
$$b_n = \left[\frac{1}{n}e^{n\sin\theta}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}}{n}} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（2）**【証明】**

$-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ において，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから，各辺に $e^{n\sin\theta} > 0$ をかけると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta} \leqq e^{n\sin\theta}\cos\theta \leqq e^{n\sin\theta}$$

よって，

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta}\,d\theta \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta \leqq \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n\sin\theta}\,d\theta$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a_n \leqq b_n \leqq a_n \quad\Longleftrightarrow\quad b_n \leqq a_n \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}b_n$$

ゆえに，示された．　**(証明終)**

（3）(2) で示した不等式の各辺に $n > 0$ をかけると，$nb_n \leqq na_n \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}nb_n$ となり，この各辺は正であるから，各辺の自然対数をとると，

$$\log(nb_n) \leqq \log(na_n) \leqq \log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}nb_n\right)$$

(1) より，

$$\log\left(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}\right) \leqq \log(na_n) \leqq \log\frac{2}{\sqrt{3}} + \log\left(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}\right) \leqq \frac{1}{n}\log(na_n) \leqq \frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{n}\log\left(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}\right) \quad (\because\ n > 0)$$

$$\log\left(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{n}\log(na_n) \leqq \frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}} + \log\left(e^{\frac{n}{2}} - e^{-\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} \cdots\cdots ①$$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

ここで,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\log\left(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\log\left\{e^{\frac{n}{2}}(1-e^{-n})\right\}^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\log\left\{e^{\frac{n}{2}}(1-e^{-n})\right\}^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\log e^{\frac{1}{2}}+\log(1-e^{-n})^{\frac{1}{n}}\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}+\log(1-e^{-n})^{\frac{1}{n}}\right\} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}=0$ であるから, ① 式において $n\to\infty$ とすれば, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は, 置換積分を用いる方法もありますが, 解答のように原始関数を見つけることができれば容易に計算できます. すなわち,

$$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx=e^{f(x)}+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

を利用しています. (2) は, 積分区間に着目して不等式を作ります. 注意したい点は, 自然対数をとりたいので, 不等式の各辺が正であることを確認しておくことです. これは真数条件を満たしていることを確認していることになります. 頻出問題なので, できるようにしておきたい問題です. (3) は, 不等式を証明した後で極限を求めるので, はさみうちの原理を用います. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(1-e^{-n})^{\frac{1}{n}}$ の計算は, $e^{-n}\to 0$, $\displaystyle\frac{1}{n}\to 0$ となるので,

$$\lim_{n\to\infty}\log(1-e^{-n})^{\frac{1}{n}}=\log 1=0$$

となります.

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto