16 （′04　東北大） 【難易度】 … 標準

z を絶対値が 1 の複素数とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　$z^3 - z$ の実部が 0 となるような z をすべて求めよ．

(2)　$z^5 + z$ の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ．

(3)　n を自然数とする．$z^n + 1$ の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ．

【テーマ】：極形式とド・モアブルの定理

方針

$|z| = 1$ であるから $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおいて考えます．また，2 つの複素数 $\arg(z_1) = \theta_1$, $\arg(z_2) = \theta_2$ において，$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ が成り立つことを利用します．

♣ ♠

解答

(1)　$|z| = 1$ であるから，$z = \cos\theta + i\sin\theta\ (-\pi < \theta \leqq \pi)$ とおくことができる．よって，

$$z^3 - z = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 - (\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \cos 3\theta - \cos\theta + i(\sin 3\theta - \sin\theta)$$

となる．実部が 0 であることから，

$$\cos 3\theta - \cos\theta = 0 \iff \cos\theta(\cos^2\theta - 1) = 0$$

よって，$\cos\theta = 0, \pm 1$ である．$-\pi < \theta \leqq \pi$ より，

$$\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$$

であるから，求める複素数 z は，$\boldsymbol{z = \pm 1, \pm i}$……(**答**)

(2)　$z^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$ である．

$$z^5 + z = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 + (\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \cos 5\theta + \cos\theta + i(\sin 5\theta + \sin\theta)$$

$|z^5 + z| = 1$ であるから，$|z^5 + z|^2 = 1$ である．ゆえに，

$$(\cos 5\theta + \cos\theta)^2 + (\sin 5\theta + \sin\theta)^2 = 1$$

$$\cos^2 5\theta + 2\cos 5\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2 5\theta + 2\sin 5\theta\sin\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$2(\cos 5\theta\cos\theta + \sin 5\theta\sin\theta) + 2 = 1$$

$$2\cos(5\theta - \theta) = -1 \iff \cos 4\theta = -\frac{1}{2}$$

$-\pi < \theta \leqq \pi$ であるから，$-4\pi < 4\theta \leqq 4\pi$ である．よって，

$$4\theta = -\frac{10}{3}\pi, -\frac{8}{3}\pi, -\frac{4}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi$$

$$\theta = -\frac{5}{6}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{z = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i}$$ **（複号任意）……（答）**

（3） $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ である．

$$z^n + 1 = (\cos\theta + i\sin\theta)^n + 1 = \cos n\theta + 1 + i\sin n\theta$$

$|z^n + 1| = 1$ であるから，$|z^n + 1|^2 = 1$ である．よって，

$$(\cos n\theta + 1)^2 + \sin^2 n\theta = 1$$

$$\cos^2 n\theta + 2\cos n\theta + 1 + \sin^2 n\theta = 1 \iff \cos n\theta = -\frac{1}{2}$$

ゆえに，$n\theta = \pm\left(\dfrac{2}{3}\pi + k\times 2\pi\right)$（$k$ は 0 以上の整数）と表すことができる．$n = 1, 2, 3, \cdots$ とするとき，

$$\theta = \pm\frac{2}{3}\pi,\ \theta = \pm\frac{2}{3}\pi, \pm\frac{4}{3}\pi,\ \theta = \pm\frac{2}{3}\pi, \pm\frac{4}{3}\pi, \pm\frac{8}{3}\pi, \theta = \ \cdots\cdots$$

のようになるため，$\arg z = \theta$ と $\arg z = -\theta$ である複素数がセットで現れる．そのため，m を自然数として一方の複素数を z_m とすればもう一方の複素数は $\overline{z_m}$ となる．
ゆえに，求める複素数の積は，$z_m\overline{z_m} = |z_m|^2 = 1$ であることから，

$$z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2}\cdot z_3\overline{z_3}\cdot\cdots\cdots\cdot z_n\overline{z_n} = |z_1|^2|z_2|^2|z_3|^2\cdots\cdots|z_n|^2 = \mathbf{1}$$ **……（答）**

となる．

◇ ♡

解説

（1）は，極形式で表さなくても次のようにして解くことができます．

別解

題意より，$z^3 - z$ は純虚数であるから，

$$z^3 - z = -\overline{(z^3 - z)}$$

が成り立つ．この式を変形すると，

$$\begin{aligned} z^3 - z = -(\overline{z})^3 + \overline{z} &\iff z^3 + (\overline{z})^3 - (z + \overline{z}) = 0 \\ &\iff (z + \overline{z})\{z^2 - z\overline{z} + (\overline{z})^2\} - (z + \overline{z}) = 0 \\ &\iff (z + \overline{z})\{z^2 - z\overline{z} + (\overline{z})^2 - 1\} = 0 \\ &\iff (z + \overline{z})\{z^2 - 2z\overline{z} + (\overline{z})^2\} = 0 \quad (\because\ |z|^2 = 1 \iff z\overline{z} = 1) \\ &\iff (z + \overline{z})(z - \overline{z})^2 = 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$z = -\overline{z}$ または $z = \overline{z}$ すなわち z は実数または純虚数である．$|z| = 1$ であることから，求める複素数 z は，$\boldsymbol{z = \pm 1, \pm i}$ **……（答）**

（2）の複号任意というのは，符号はすべての組合せをとるということを意味します．すなわち，$z = \pm\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$（複号任意）とは，

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

の 4 つを表しています．

（3）では，複素数の積を考えます．複素数の積は偏角の和になります．$\arg z = \theta$ と $\arg z = -\theta$ となる複素数がセットで現れるのですから，その和は 0 となります．すなわち積は $\cos 0 + i\sin 0 = 1$ になるということです．