

19 (14 神戸大)

【難易度】…標準

空間において、原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり、その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{OD} を、 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ を用いて表せ。
 (2) $OA = OB = OC$ のとき、ベクトル

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$$

が、平面 α と垂直であることを示せ。

【テーマ】: 空間ベクトル

方針

(1) は、 $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$ であることを用います。(2) は、 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$ と \vec{AB}, \vec{AC} が垂直であることを示します。

解答

- (1) $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$ であるから、始点を O に変換すると、

$$\vec{OD} - \vec{OB} = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OB}$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} \dots \dots \text{(答)}$$

- (2) 【証明】

$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$ とおくと、(1) の結果を用いて、

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}$$

$$= 2(\vec{OA} + \vec{OC})$$

また、 \vec{OP} と \vec{AB}, \vec{AC} との内積を考える。

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 2(\vec{OA} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA})$$

$$= 2(\vec{OA} \cdot \vec{OB} - |\vec{OA}|^2 + \vec{OC} \cdot \vec{OB} - \vec{OC} \cdot \vec{OA}) \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{AC} = 2(\vec{OA} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$= 2(|\vec{OC}|^2 - |\vec{OA}|^2) \dots \dots \textcircled{2}$$

ここで、 $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ であるから、 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ である。

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \iff (\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = 0$$

$$\iff \vec{OB} \cdot \vec{OC} - |\vec{OB}|^2 - \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \dots \dots \textcircled{3}$$

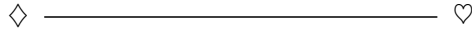
題意より、 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ であるから、

$$\textcircled{2} \text{ より、} \vec{OP} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ より、} \vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$$

よって、 $\vec{OP} \perp \vec{AC}$ かつ $\vec{OP} \perp \vec{AB}$ であるから、 \vec{OP} は平面 α に対して垂直であることが示された。

(証明終)



解説

(1) は、4 点 A, B, C, D の関係式を作って始点を O に変換すれば目的の式が得られると考えます。

(2) は、一般に平面に垂直なベクトル \vec{n} は、平面上の 1 次独立な 2 つのベクトル \vec{a}, \vec{b} と垂直になります。すなわち、平面 α と垂直であることを示すためには、 $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ かつ $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$ であることを示せばよいのです。本問を解くポイントは、四角形 ABCD が正方形であることから、 $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ を利用することです。これは、 $\vec{AB} \perp \vec{AD}$ でも構いませんが、(1) の結果を使えば D は消去できるので、 $\vec{AD} = \vec{BC}$ であることを用いてあらかじめ D を使わない式を作る方がよいでしょう。なお、本問で正方形の 1 辺の長さが 1 と与えられていますが、この条件は問題を解く際は不要です。