33 （′10　一橋大） **【難易度】** … 標準

原点を O とする xyz 空間内で，x 軸上の点 A，xy 平面上の点 B，z 軸上の点 C を，次を満たすように定める．

$$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{OBC} = \theta,\quad \angle \mathrm{AOB} = 2\theta,\quad \mathrm{OC} = 3$$

ただし，A の x 座標，B の y 座標，C の z 座標はいずれも正であるとする．さらに，△ABC 内の点のうち，O からの距離が最小の点を H とする．また，$t = \tan\theta$ とおく．

（1） 線分 OH の長さを t の式で表せ．

（2） H の z 座標を t の式で表せ．

【テーマ】：空間図形の計量

方針

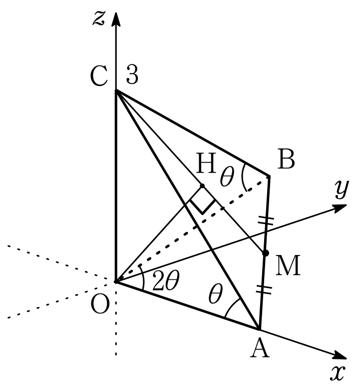
空間図形を考えるときは，考えている三角形を取り出して平面図形として捉えるとわかりやすくなります．

♣ ♠

解答

（1） $\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{OBC} = \theta, \angle \mathrm{COA} = \angle \mathrm{COB} = 90^\circ$ であり，OC を共有しているので，

$$\triangle \mathrm{OAC} \equiv \triangle \mathrm{OBC}$$



よって，OA = OB である．

また，△OAC において，$\mathrm{OA} = \dfrac{3}{\tan\theta}$ であるから，$t = \tan\theta$ のとき，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \frac{3}{t}$$

次に，AB の中点を M とすると，$\angle \mathrm{AOM} = \theta, \angle \mathrm{OMA} = 90^\circ$ より，

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA}\cos\theta = \frac{3\cos\theta}{t}$$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ であるから，

$$\mathrm{OM} = \frac{3\cos\theta}{t} = \frac{3}{t\sqrt{1+t^2}}$$

△OMC で三平方の定理より，

$$\mathrm{MC}^2 = \mathrm{OC}^2 + \mathrm{OM}^2 = 9 + \frac{9}{t^2(1+t^2)} = \frac{9(t^4+t^2+1)}{t^2(1+t^2)}$$

一方，△OMC ∽ △HOC より，

$$\mathrm{OM} : \mathrm{MC} = \mathrm{HO} : \mathrm{OC} \text{ すなわち } \mathrm{OH}\cdot\mathrm{MC} = \mathrm{OM}\cdot\mathrm{OC}$$

したがって，

$$\mathrm{OH} = \frac{\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OC}}{\mathrm{MC}} = \frac{\dfrac{3}{t\sqrt{1+t^2}}\cdot 3}{\dfrac{3}{t}\sqrt{\dfrac{t^4+t^2+1}{1+t^2}}} = \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） △OCH において，H から OC に垂線を下ろしその足を I とすると，H の z 座標は OI の長さと等しい．

△OMC ∽ △IOH より，

$$\mathrm{OM}:\mathrm{MC}=\mathrm{IO}:\mathrm{OH} \text{ すなわち } \mathrm{IO}\cdot\mathrm{MC}=\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OH}$$

したがって,

$$\mathrm{IO}=\frac{\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OH}}{\mathrm{MC}}=\frac{\dfrac{3}{t\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}}{\dfrac{3}{t}\sqrt{\dfrac{t^4+t^2+1}{1+t^2}}}=\boldsymbol{\frac{3}{t^4+t^2+1}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

—— ♢ —— ♡ ——

解説

空間図形が苦手な人は，考えている三角形を取り出して考えましょう．そうすれば平面図形の問題となるため，考え易くなります．本問は，相似すなわち三角比の定義を用いて考えることで解決できます．もちろんベクトルを用いて考えることもできるので，別解を考えるのもよいでしょう．