4 （'15　北海道大）　**【難易度】** … 標準

a は実数とし，2 つの曲線

$$C_1 : y = (x-1)e^x,\quad C_2 : y = \frac{1}{2e}x^2 + a$$

がある．ただし，e は自然対数の底である．C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする．

（1）　a を t で表せ．

（2）　t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ．

【テーマ】：関数の極大極小

方針

(1) は，C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線を求めて，これが C_2 と接するので，判別式を利用します．(2) は，a を t の関数とみなして，微分して増減表をかき，極値を求めます．

解答

（1）　C_1 において，

$$y' = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

であるから，C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線の方程式は，

$$y = te^t(x-t) + (t-1)e^t \quad \Longleftrightarrow \quad y = te^t x + (-t^2+t-1)e^t$$

これが C_2 と接するとき，

$$\frac{1}{2e}x^2 + a = te^t x + (-t^2+t-1)e^t$$

$$x^2 + 2ea - 2ete^t x - 2e(-t^2+t-1)e^t = 0$$

$$x^2 - 2ete^t x + 2e(t^2-t+1)e^t + 2ea = 0$$

が，重解をもてばよいので，判別式を D とすると，

$$D/4 = (-ete^t)^2 - \{2e(t^2-t+1)e^t + 2ea\} = 0$$

$$t^2e^{2t+2} - 2e(t^2-t+1)e^t - 2ea = 0$$

$$2ea = t^2e^{2t+2} - 2e(t^2-t+1)e^t$$

$$a = \frac{t^2e^{2t+2} - 2e(t^2-t+1)e^t}{2e}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a = \frac{1}{2}t^2e^{2t+1} - (t^2-t+1)e^t} \cdots\cdots\text{(答)}$$

（2）　$f(t) = \dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1} - (t^2-t+1)e^t$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(t) &= te^{2t+1} + \frac{1}{2}t^2e^{2t+1}\cdot 2 - (2t-1)e^t - (t^2-t+1)e^t \\ &= (t^2+t)e^{2t+1} - (t^2+t)e^t \\ &= t(t+1)(e^{t+1}-1)e^t \end{aligned}$$

$f'(t) = 0$ のとき，$t(t+1) = 0$ または $e^{t+1} = 1$ であるから，$t = 0,\ -1$ である．よって，増減表は次のようになる．

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	$-\dfrac{5}{2e}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

よって，**$t=0$ のとき，極小値 -1**……**(答)**

解説

(1) は，C_1 上の点における接線の方程式なので公式で求めることができます．C_2 の方程式が放物線なので，直線と放物線が接するということは判別式が利用できます．ちなみに，放物線でなくても楕円や双曲線などの 2 次曲線と直線が接するときは，判別式を利用することができます．

(2) は，a を t の関数とみなして a を t で微分します．増減表をかいて極値を求めますが，その際に注意しないといけないのは，$f'(t)$ の符号です．$f'(t)=0$ の前後で必ずしも符号が変わるとは限らないので，安易に $+$ と $-$ を交互に書かないようにしましょう！符号を見極めるポイントは，$f'(t)$ において，確実に符号がわかるものと t の値によって符号が変化するものを区別します．本問では，$e^t>0$ なので，これは無視し，$t(t+1)(e^{t+1}-1)$ の符号に着目します．次のような表をかくと，符号は一目瞭然です！

-1　　0　　t

t	$-$	$-$	$+$
$t+1$	$-$	$+$	$+$
$e^{t+1}-1$	$-$	$+$	$+$
$f'(t)$	$-$	$-$	$+$

まず，$f'(t)=0$ となる t の値を t 軸上にとります．次に，$f'(t)$ の因数を一つずつ書き込みます．このとき，e^t は正の数なので，無視します．ただし，負の数であれば，書き込んでおいた方が後でミスを防げるでしょう．あとは，『$-$』が奇数個あれば $f'(t)$ の符号は『$-$』ですし，『$-$』が偶数個あれば $f'(t)$ の符号は『$+$』になります．符号で迷ったとき，具体的な値を代入するという手法もありますが，具体的な値を代入することが困難な場合もあります．しかし，この方法は $f'(t)=0$ となる値を求めているわけですから，それぞれの因数の符号は容易に判断できるため汎用性があるでしょう．