◀1996 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ に対して，行列 $B^{-1}AB$ が表す 1 次変換を f とする．ただし，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ である．次の問いに答えよ．

(1)　点 $\mathrm{P}(\sin\theta, \cos\theta)$ の f による像を求めよ．

(2)　f が直線 $y=x$ をそれ自身に移すとき，θ の値を求めよ．

(3)　上で求めた θ に対して，f は原点を通るある直線に関する対称移動であることを示し，その直線の方程式を求めよ．

2　原点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を S 上の点とする．点 P を通る平面 α に対して S と α が交わってできる円周を C とする．次の問いに答えよ．

(1)　平面 α 上での点 P における C の接線 l は，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に直交することを示せ．

(2)　球面 S と点 P で接する平面を β とする．平面 β と xy 平面とのなす角を θ として，$\cos\theta$ を求めよ．

(3)　平面 α が点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$ を通り，さらに直線 l と xy 平面とのなす角が上で求めた θ であるとする．このとき，平面 α の方程式を求めよ．

3　自然数 $n>1$ に対して，$a_n=\log[(n-1)!]+\dfrac{1}{2}\log n$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　曲線 $y=\log x$ 上の点 $(k, \log k)$ における接線と 2 直線 $x=k-\dfrac{1}{2}$ と $x=k+\dfrac{1}{2}$，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，$k \geqq 2$ とする．

(2)　$\log[(n-1)!] \geqq \left(n-\dfrac{1}{2}\right)\log\left(n-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{2}\log\left(\dfrac{3}{2}\right)-(n-2)$ を示せ．

(3)　$a_n > n\log n - n + \dfrac{3}{2}\left[1-\log\left(\dfrac{3}{2}\right)\right]$ を示せ．

4　1 から 9 までの数字が 1 ずつ書いてあるカードが，それぞれ 1 枚ずつ，合計 9 枚ある．これらを 3 枚ずつ 3 つのグループに無作為に分け，それぞれのグループから最も小さい数の書かれたカードを取り出す．次の問いに答えよ．

(1)　取り出された 3 枚のカードの中に 4 が書かれたカードが含まれている確率を求めよ．

(2)　取り出された 3 枚のカードに書かれた数字の中で 4 が最大である確率を求めよ．

5　0 と 1 を有限個並べたものを語ということにする．語の例としては 0, 010, 00101, 100110 などがある．いま 2 つの語 $A=1$, $B=10$ をもとにして

$$C_1=A,\ C_2=B,\ C_n=C_{n-2}C_{n-1}C_{n-2}, \ (n \geqq 3)$$

のように定める．例えば，$C_3=1101$ である．次の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 3$ のとき，語 C_n に対して，最初，または最後の数字を 1 個か 2 個取りさると，残りは同じ語が循環して現れている．このことを数学的帰納法により示せ．

(2)　語 C_n に現れる 0 の個数を a_n とし，1 の個数を b_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF に内接する円の中心を O とし，その円周上の点を P とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{x}$ とするとき，内接円のベクトル方程式を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$ で表せ．

(2)　線分 BC の中点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たす k の値をすべて求めよ．

2　x 軸の正の部分を始線として，角 θ の動径と，原点 O を中心とする半径 1 の円との交点を P とする．行列 $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　ベクトル $f\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積を θ の関数で表し，その関数の $0\leqq\theta\leqq\pi$ における最大値と最小値を求めよ．

(2)　上で求めた関数の最大値を与える θ に対して，$f\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は平行であることを示せ．

3　実数 α と β は $\alpha\leqq\beta$, $\alpha\neq 0$, $\beta>0$ を満たし，

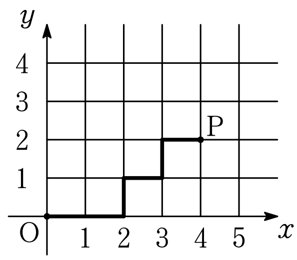
$$f(x)=\frac{3}{\alpha\beta}(x-\alpha)(x-\beta),\quad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^\beta |f(x)|\,dx$ を $F(\alpha)$ と $F(\beta)$ で表せ．

(2)　$\alpha=\beta^2$ のとき，$\displaystyle\int_0^\beta |f(x)|\,dx$ を最小にする β を求めよ．

4　原点 O から出発して，座標平面上を x 軸の正の方向，または y 軸の正の方向に 1 だけ進むことを次々に行って得られる経路を道という．右の図は，原点 O と点 P$(4,\,2)$ とを結ぶ道の例である．原点と点 $(i,\,j)$ を結ぶ，領域 $\{(x,\,y)|x\geqq y\}$ 内の道の総数を $N(i,\,j)$ とする．次の問いに答えよ．



(1)　$N(2,\,2)$, $N(3,\,1)$, $N(3,\,2)$ を求めよ．

(2)　$n\geqq 1$ のとき，$N(n,\,1)$ を求めよ．

(3)　$n\geqq 3$ のとき，$N(n,\,2)$ を $N(n,\,1)$ と $N(n-1,\,2)$ で表し，$N(n,\,2)$ を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 代幾 １次変換
- **2** 標準 代幾 ベクトル
- **3** 標準 微積 積分法の応用
- **4** 標準 確統 確率
- **5** やや難 基解 数列・微積 数列の極限

♣ 文系学部

- **1** 標準 代幾 ベクトル
- **2** 標準 代幾 １次変換・基解 三角関数
- **3** 標準 基解 微分積分
- **4** 標準 基解 数列・確統 場合の数

略解

◇ 理系学部

1 (1) $(-\sin\theta,\ -\cos\theta)$

(2) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

(3) 証明は省略 ： $y = -x$

2 (1) 証明は省略

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $\alpha : 2x + z - \sqrt{3} = 0$

3 (1) $\log k$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $\dfrac{5}{14}$

(2) $\dfrac{9}{28}$

5 (1) 証明は省略

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$

◇ 文系学部

1 (1) $\left|\vec{x} - (\vec{a} + \vec{b})\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{3}{2}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$

(3) $k = \dfrac{1}{7},\ 1$

2 (1)

$$\begin{cases} \text{最大値 ： } 3 & \left(\theta = \dfrac{\pi}{6}\right) \\ \text{最小値 ： } -1 & \left(\theta = \dfrac{2}{3}\pi\right) \end{cases}$$

(2) 証明は省略

3 (1)

$$\int_0^\beta |f(x)|\,dx = \begin{cases} F(\beta) & (\alpha<0) \\ 2F(\alpha) - F(\beta) & (\alpha>0) \end{cases}$$

(2) $\beta = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

4 (1) $N(2,\ 2) = 2,\quad N(3,\ 1) = 3,\quad N(3,\ 2) = 5$

(2) $N(n,\ 1) = n$

(3) $N(n,\ 2) = N(n,\ 1) + N(n-1,\ 2),\quad N(n,\ 2) = \dfrac{n^2+n-2}{2}$